

Faisceaux en logique et en géométrie

Jean Gillibert

Université Bordeaux 1, IMB/A2X/GAA

Christian Retoré

Université Bordeaux 1, INRIA & LaBRI/MF/IL

Journées de l'UFR maths-info — 1^{er} et 2 juillet 2010

Table des matières

I Complétude de la logique classique du 1er ordre : formules, preuves, modèles	4
II Faisceaux	12
III Modèles faisceautisés et complétude de la logique intuitionniste	18
IV Travaux en cours, perspectives et applications	30

Petite école sur les « faisceaux en logique et en géométrie »

- C'était les vendredis de 16h à 17h, reprise à la rentrée.
- Merci à Boas Erez pour sa participation et ses exposés.
- Merci aux membres de l'EPI INRIA Signes et aux doctorants de Boas pour leur participation assidue.
- Merci au LaBRI et à l'IMB de leur soutien.

Motivations : trouver des modèles naturels (non *ad hoc*, existant dans la nature mathématique) qui permettent d'établir un résultat de complétude pour les logiques non classiques rencontrées

- pour les mathématiques constructives,
- pour la spécification et la synthèse de programme sûrs,
- pour la vérification de programmes,
- **pour la sémantique du langage naturel.**

Première partie

**Complétude
de la logique classique du 1er ordre :
formules, preuves, modèles**

1. Langage, formules

Langage du premier ordre :

- $*$ (symbole de fonction à deux arguments),
- e (constante),
- $\geq, =$ (relations)
- variables, connecteurs logique, quantificateurs

Exemple de formule :

$$\forall x \forall z \exists k (k * x \geq z * e)$$

Anneau local :

un unique idéal maximal.... pas une formule du premier ordre.

$\forall x \exists y (xy = 1) \vee (1 - x)y = 1$ formule du premier ordre.

2. Preuves

$T \vdash F$, c.-à-d. T entraîne F , est défini par des règles comme :

$A \vdash A$ (sous l'hypothèse A on a A).

$$\frac{A, H_1, \dots, H_n \vdash C}{H_1, \dots, H_n \vdash A \Rightarrow C} \quad \frac{H_1, \dots, H_n \vdash C \quad G_1, \dots, G_p \vdash C \Rightarrow D}{H_1, \dots, H_n, G_1, \dots, G_p \vdash D}$$

$$\frac{H_1, \dots, H_n \vdash C(x)}{H_1, \dots, H_n \vdash \forall x C(x)} \text{ pas de } x \text{ dans } H_1, \dots, H_n$$

Si T est infini, $T \vdash F$ signifie que pour un T_f fini inclus dans T on a $T_f \vdash F$.

3. L -structures, modèles

Une L structure est un ensemble muni de lois de composition et de relations pour interpréter le langage logique :

- On se donne un ensemble M (par exemple \mathbb{N})
- Constante (par ex. e) \mapsto élément de M (par ex. 0)
- Symbole de fonction n -aire (par ex. $*$, binaire)
 \mapsto fonction de M^n dans M (par ex. $+$).
- \geq partie de $M \times M$ (par exemple $\{(x, y) \mid \exists z \in M y = x + z\}$)

Toute formule F est vraie ou fausse dans une L -structure M .
Si elle est vraie on note cela $M \models F$.

Soit T une théorie (un ensemble de formules, appelées axiomes) et M une L -structure. M est un modèle de T ($M \models T$) si tout axiome de T est vrai dans M .

4. Complétude

Théorème 1 (Gödel, Herbrand 1930 — Henkin 1949)

Complétude du calcul des prédicats.

Les propriétés (1) et (2) sont équivalentes :

(1) $T \vdash F$ (il en existe une déduction syntaxique)

(2) Tout modèle satisfaisant T satisfait F .

Par exemple, toute propriété vraie dans tous les groupes est formellement démontrable à partir des axiomes de groupe (et les propriétés démontrables à partir des axiomes de groupe sont vraies dans tous les groupes, fort heureusement !!!).

5. Logique intuitionniste

Motivations initiales maths constructives et fondements :

- Lorsque $A \vee B$ est démontrable, A ou B l'est aussi.
(ainsi, le tiers exclu $A \vee \neg A$ est rejeté).
- (variante infinie) on peut extraire de toute preuve de $\exists x P(x) = \bigvee_x P(x)$ un terme t telle que $P(t)$.

Théorème des valeurs intermédiaires, différents arguments :

- Non constructif : raisonnement par l'absurde
L'image d'un connexe est un connexe,...
- Constructif : dichotomies successives

La logique intuitionniste est une approche du constructivisme mais ce n'est pas la seule — les nombres réels et l'énoncé ci-dessus deviennent très compliqués en intuitionnisme, c'est juste une illustration de la notion de preuve constructive.

6. Logique intuitionniste et informatique

Interpréter une formule par l'ensemble de ses preuves :
une preuve de $A \Rightarrow B$
est un programme (fonction) de A dans B

Correspondance de Curry-Howard

- type = formule logique
- programme = preuve intuitionniste
- évaluation du programme = normalisation de la preuve
- résultat = preuve normale (très longue mais élémentaire)

En fait seule la structure propositionnelle est utile au calcul.

Preuve de $\forall p \forall q N(p), N(q) \rightarrow N(p+2q)$ utilisant les axiomes de l'addition, de la multiplication

\mapsto programme prenant deux entiers p et q et calculant $p+2q$.

7. Quels modèles pour la logique intuitionniste ?

... pour avoir la complétude : (1) \Leftrightarrow (2)

(1) F est une conséquence syntaxique de T

(2) tout modèle satisfaisant T satisfait F .

Le système déductif s'obtient par des restrictions assez élémentaires, il est même plus naturel.

Formules quotientées par $\vdash A \Leftrightarrow B$

– classique : algèbre de Boole (dont les $\mathcal{P}(E)$)

– intuitionniste : algèbre de Heyting (dont les ouverts d'un espace topologique ordonnés par l'inclusion).

Les **modèles** permettent de voir des notions géométriques **faisceaux, topos**, sous un angle nouveau.

Deuxième partie

Faisceaux

8. Préfaisceaux

Soit X un espace topologique et Ω l'ensemble de ses ouverts.

Soit \mathcal{C} une catégorie d'objets (les ensembles, les groupes, les anneaux, ...).

Faisceau : variation continue sur Ω d'un objet de \mathcal{C} .

Pour tout ouvert U de Ω on se donne un objet $F(U) \in \mathcal{C}$.

Pour tous U et V avec $U \supset V$ on dispose d'une fonction de restriction : $\rho_{U,V} : F(U), F(V)$ satisfaisant :

- $F(\emptyset)$ est un singleton.
- $\rho_{U,U} = \text{Id}_{F(U)}$
- si $U \supset V \supset W$ alors $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$

9. Faisceaux

Un faisceau est un préfaisceau satisfaisant la condition de recollement suivante :

Pour tout recouvrement $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ de $U \in \Omega$
pour toute famille (f_i) avec $f_i \in F(U_i)$ pour tout i
si les f_i coïncident sur les intersections

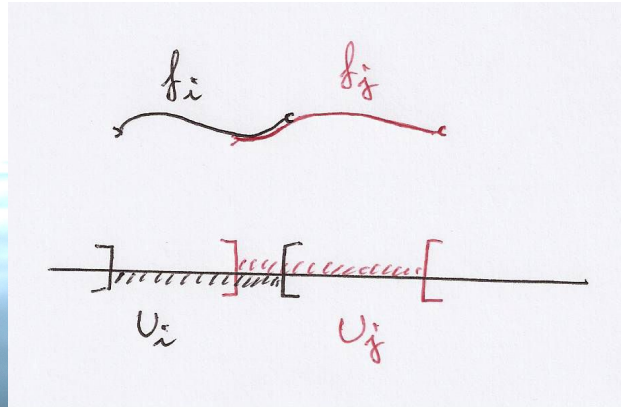
$$\forall i, j \quad \rho_{U_i, U_i \cap U_j}(f_i) = \rho_{U_j, U_j \cap U_i}(f_j)$$

alors il existe un unique $f \in F(U)$ tel que

$$\rho_{U, U_i} = f_i \text{ pour tout } i.$$

10. La condition de recollement, en français

Pour tout recouvrement $(U_i)_{i \in I}$, si une famille de sections locales $(f_i)_{i \in I}$ coïncident sur les intersections, alors les (f_i) sont les restrictions au U_i d'une unique section globale f .



11. Exemples sur l'espace topologique \mathbb{R}

$F(U) = \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$ (fonctions continues de U dans \mathbb{R}) est un faisceau d'anneaux.

Un préfaisceau qui n'est pas un faisceau :

$F(U) = \mathcal{B}(U, \mathbb{R})$ (fonctions bornées de U dans \mathbb{R}) est un préfaisceau d'anneaux mais pas un faisceau :

le recollement de fonctions localement bornées peut ne pas être globalement borné.

12. Exemples en géométrie

Le fibré tangent sur une variété différentielle réelle est un faisceau de \mathbb{R} -espaces vectoriels

Le faisceau des n -formes différentielles sur une variété différentielle

Plus généralement, les fibrés vectoriels sont des faisceaux d'espaces vectoriels.

Les fonctions régulières sur une variété algébrique forment un faisceau, appelé faisceau structural de la variété.

Troisième partie

**Modèles faisceautisés
et complétude de la logique
intuitionniste**

13. Faisceaux de L -structures

Classiquement un modèle M de T est une L -structure (c.-à-d. un ensemble, des lois de composition n -aires des relations n -aires permettant d'interpréter L) dans laquelle les axiomes de T sont vrais.

Ici, on va se donner un faisceau à valeurs dans la catégorie des L -structures. Un morphisme de L structures est une application qui préserve l'interprétation des termes et la vérité des formules.

14. Yoneda et les L -structures

Le lemme de Yoneda garantit qu'il revient au même de se donner

- 1) un faisceau F à valeurs dans la catégorie des L -structures.
- 2) un faisceau d'ensembles F muni d'un morphisme de faisceaux $F^n \rightarrow F$ pour chaque opération n -aire et un d'un sous-faisceau de F^n pour chaque relation n -aire du langage L .

Par exemple, il revient au même de se donner un faisceau d'ensembles F muni d'un morphisme de faisceaux $F \times F \rightarrow F$ ou de se donner un faisceau à valeurs dans la catégorie des magmas (ensembles munis d'une loi de composition interne).

15. Yoneda et le recollement des vérités élémentaires

Pour les relations, le recollement induit la propriété suivante :

si pour tout U_i d'un recouvrement $U = \bigcup U_i$ on a

$$F(U_i) \models R(\rho_{U,U_i}(c_1), \dots, \rho_{U,U_i}(c_p))$$

($c_k \in F(U)$, ce sont des sections globales)

alors $F(U) \models R(c_1, \dots, c_p)$

16. Forcing de Kripke-Joyal : principes

Etant donné un faisceau M de L -structures, comment exprimer que M est un modèle de T ? On définit une vérité locale, relative à un ouvert U , en associant à U un modèle usuel par un faisceau.

Le forcing étend à toute formule A à p variables, la propriété de recollement :

- si pour tout U_i d'un recouvrement $U = \bigcup U_i$ on a
 $F(U_i) \models A(\rho_{U,U_i}(c_1), \dots, \rho_{U,U_i}(c_p))$
($c_k \in F(U)$, ce sont des sections globales)
- alors $F(U) \models A(c_1, \dots, c_p)$

17. Forcing de Kripke-Joyal : principes (bis)

On définit $U \Vdash F$ (U ouvert F formule) comme le **forcing** de Paul J. Cohen (qui construit un cardinal strictement entre ceux de \mathbb{N} et de \mathbb{R}).

Remarque la vérité d'une formule dans un ouvert se projette sur un ouvert plus petit $U \Vdash F, V \subset U$ entraîne $V \Vdash F$.

18. Forcing de Kripke-Joyal : règles

$U \Vdash F$ est définie en fonction des $V \Vdash G$ pour $V \subset U$ et G sous formule de F .

$U \Vdash F_1 \wedge F_2$ si $U \Vdash F_1$ et $U \Vdash F_2$.

$U \Vdash F_1 \vee F_2$ s'il existe deux ouverts U_1 et U_2 avec $U = U_1 \cup U_2$ et $U_1 \Vdash F_1$ et $U_2 \Vdash F_2$.

$U \Vdash \exists x A(x)$ s'il existe un recouvrement $U = \bigcup U_i$ et $\forall i \exists f_i \in F(U_i)$ tel que $U_i \Vdash F(f_i)$.

$\emptyset \Vdash \perp$

$U \Vdash \neg F$ si $\forall V \subset U (V \neq \emptyset \text{ entraîne } V \nVdash F)$.

$U \Vdash F_1 \Rightarrow F_2$ si $\forall V \subset U (V \Vdash F_1 \text{ entraîne } V \Vdash F_2)$.

19. Ω -structures

La complétude de la logique intuitionniste pour les modèles faisceautisés est toujours présentée de manière indirecte via les Ω -sets et Ω -structures.

Les formules quotientées par $\vdash A \leftrightarrow B$ et avec l'ordre $[A] \leq [B]$ si $\vdash A \Rightarrow B$ (\vdash intuitionniste). forment une algèbre de Heyting, qu'on peut compléter (sup quelconques) en Ω_{\vdash} (cHa).

On peut définir des Ω_{\vdash} -structures (éléments partiels, valeur de vérité dans Ω). Être vrai dans la Ω_{\vdash} -structure syntaxique équivaut alors à être démontrable.

20. Complétude de la logique intuitionniste pour les modèles faisceautisés

Ω_{\vdash} n'est peut-être pas une topologie, mais c'est une prétopologie (ou topologie de Grothendieck) et on peut définir des faisceaux au dessus de Ω_{\vdash} .

Il y a une équivalence de catégories $Sh(\Omega) \simeq \Omega\text{-Structure}$ qui affirme que la Ω_{\vdash} -structure syntaxique est un faisceau, qui garantit la complétude.

En fait, en présence d'une vraie topologie, cela revient à associer à une formule F comme valeur de vérité l'ouvert

$$|F| = \bigcup_{\mathcal{U} \in \Omega, \mathcal{U} \Vdash F} \mathcal{U}$$

21. Exemple dans le cadre des anneaux

Langage des anneaux $(0, 1, +, \times)$.

Soit la formule $(\neg\forall xA(x)) \Rightarrow (\neg\forall x\neg\neg A(x))$

avec $A(x) : (x = 0) \vee \neg(x = 0)$.

C'est une formule démontrable classiquement mais pas intuitionnistiquement. Il existe donc un modèle faisceautisé qui la réfute.

Effectivement, elle est fautive dans le faisceau sur \mathbb{R} , $U \mapsto \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$ (qui est un bien un anneau). Ce faisceau d'anneaux est un modèle intuitionniste des axiomes des anneaux (locaux).

22. Exemple dans le cadre des anneaux : détails

$$(\neg \forall x A(x)) \Rightarrow (\neg \forall x \neg \neg A(x))$$

avec $A(x) : (x = 0) \vee \neg(x = 0)$ ne peut être vraie dans ce modèle :

$\mathbb{R} \models \forall x \neg \neg(x = 0 \vee \neg x = 0)$ est vraie, car elle est démontrable.

$\mathbb{R} \models \neg \forall x (x = 0 \vee \neg x = 0)$ est aussi vraie. D'après Kripke-Joyal, cela revient à trouver dans tout ouvert U un ouvert V et une fonction f de $\mathcal{C}(V, \mathbb{R})$ tel que V ne soit pas la réunion d'un ouvert V_1 sur lequel f est constamment nulle, et d'un ouvert V_2 ne contenant pas d'ouvert V'_2 sur lequel f soit constamment nulle. Prendre $V =]a, b[$ et $f(x) = 0$ pour $x \in]a, (a+b)/2[$ et $f(x) = x - (a+b)/2$ pour $x \in [(a+b)/2, b[$

23. Extension à la logique d'ordre supérieur et multi-sortes : topos

1) Toutes les variables désignent des objets de même nature (des éléments du modèle) : on peut combiner des domaines différents et spécifier où varient les variables.

2) La logique du premier ordre ne permet pas de quantifier sur des ensembles, des relations, des fonctions,...

$Sh(\Omega)$ est un topos (les faisceaux se manipulent comme des ensembles intuitionnistes en général, parfois Booléens)

La complétude s'obtient comme pour la logique classique d'ordre supérieur par un modèle de Henkin : un sous-ensemble varie non dans $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ mais dans la sous-algèbre de $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ correspondant aux parties définissables.

Quatrième partie

Travaux en cours, perspectives et applications

24. Perspectives : modèles des preuves

Modèle des preuves (par ex. espaces cohérents de Girard) :

Formule propositionnelle $A \rightarrow$ espace cohérent $[A]$

Preuve π de $A \Rightarrow B \rightarrow$ morphisme $[\pi]$ de A dans B

Normalisation d'une preuve $\pi \rightsquigarrow \pi^\circ \rightarrow$ égalité $[\pi] = [\pi^\circ]$.

Logique intuitionniste propositionnelle

\rightarrow catégorie cartésienne fermée.

$$(A \wedge B) \Rightarrow C \equiv A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \quad C^{(A \times B)} \equiv C^{(B^A)}$$

25. Perspectives : modèles des preuves et modèles du premier ordre

Comment faire des modèles des preuves du premier ordre incluant les modèles des formules du premier ordre ? Comment cela s'articule-t-il ?

Travaux de Lawvere, constructions assez délicates : **hyperdoctrines** (à étudier dans notre petite école).

Tressage d'une catégorie cartésienne fermée (à x fixé on a une CCC) et d'une catégorie représentant les termes, quantification phénomène transverse.

26. Extensions en vue : logique linéaire du premier ordre

La logique linéaire de Girard propose des connecteurs plus fins qui précisent la nature des fonctions définissables par des preuves : quand sont elles réversibles, les arguments sont ils pérennes ?

Elle permet de retrouver facilement toute la logique intuitionniste (et plus ou moins la logique classique) : preuves, formules etc.

$$A, A \multimap B \vdash B \qquad A, A \multimap B \not\vdash A \qquad A, A \multimap B \not\vdash A \otimes B$$

Mais à ce jour nous n'avons pas de modèle naturel et complet pour la logique linéaire du premier ordre.

27. Applications : sémantique du langage naturel.

1) hyperdoctrines

Autres applications : spécification de programmes, extraction de programme sûrs, gestion de processus concurrents, ... (PPS, IML)

En linguistique, lors du calcul des formules associées à des phrases (toute commune a un maire $\forall x \text{ ville}(x) \Rightarrow \exists y \text{ maire}(y, x)$) les formules sont vues comme des preuves intuitionnistes du fait que les prédicats ont le bon nombre d'arguments, qu'ils sont du bon type, etc.

Mais les formules sont aussi organisées entre elles : $\text{ville}(x) \Rightarrow \text{institution}(x)$ et on souhaite articuler ces deux niveaux de preuves et que les deux types de modélisation cohabitent.

28. Applications : sémantique du langage naturel.

2) modèles de la logique linéaire

La logique linéaire permet de distinguer les transformations qui affectent leurs arguments et celles qui le préservent, pour d'autres transformations.

$ville(t) \Rightarrow lieu(t)$ $ville(t) \Rightarrow institution(t)$ $ville(t) \multimap foot(t)$

Bordeaux est au bord de la Garonne mais s'oppose à la construction d'un pont supplémentaire.

Bordeaux a battu Lyon et s'oppose à la construction d'un pont supplémentaire.

Ceci utilise la logique linéaire du premier ordre dont nous n'avons pas de modèles (naturels + complétude).

29. Pour aller plus loin : lectures introductives

Yves ANDRÉ, Topos, premier chapitre des Leçons de mathématiques contemporaines à l'IRCAM, 2009

Nicholas ASHER Lexical Meaning in Context : A Web of Words. Cambridge University Press, 2010.

Pierre CARTIER, Logique, catégories et faisceaux. Séminaire Bourbaki, 20 (1977-1978), Exp. No. 513, 24 p.

Jean-Yves GIRARD Le point aveugle — cours de logique Volume I Hermann, 2004.

Jean PETITOT, La neige est blanche ssi... Prédication et perception Mathématiques et Sciences Humaines, 140, pp. 35-50, 1997

Pas envie de lire ?... l'école se poursuit en 2010/2011 !