



La quantification en logique et en langue: complexité linguistique

Christian Retoré
(Université de Bordeaux, LaBRI & INRIA)

Journée de Complexité Linguistique
Laboratoire Parole et Langage, Aix-en-Provence

Mardi 18 janvier 2011



Table des matières

I	Quantificateurs usuels	3
II	Quantificateurs généralisés	16
III	Remarques sur l'analyse humaine des quantificateurs	22
IV	Conclusions et perspectives	26



Première partie

Quantificateurs usuels



1. Historique : une affaire classée ?

- Un sujet très ancien (Aristote, Avicenne, scolastique,...)
preuves (finies)
- Solution "définitive" : Frege, Hilbert, Russell
ensembles, modèles (infinis)

En linguistique : beaucoup d'études, dans un cadre unique à la Frege, qui passe à côté des données ou même va à leur rencontre.

- Logiques pour la linguistique
(modale, intuitionniste, linéaire)
- Actualité en traitement automatique
(portées, ambiguïté)
- Aspects cognitifs (*human processing*).

Beaucoup de questions, peu de réponses à ce jour.



2. Préjugés en linguistique informatique

D'aucuns disent que la quantification est...

- rare
- sans intérêt pratique
- difficile à modéliser (ça, c'est peut être vrai ;-)



3. Données : « *il existe* »

Le « *il existe* » est très fréquent....

Il est introduit pour une sorte, avec un prédicat par

(1) quelqu'un : quelqu'un dort

(2) quelque chose : Pierre photographie quelque chose

Il arrive souvent aussi avec deux propriétés

(restriction, prédicat)

(3) un : un étudiant dort

= quelqu'un qui dort est étudiant (? point de vue)

(4) certains : certains étudiants ont raté (au moins deux?)

DRT « Théorie des représentations discursives » organise le discours en suivant l'introduction de référents de discours par des existentiels.



4. Données : «*pour tout*»

Le «*pour tout*» est moins fréquent, mais on en trouve : y compris en dehors des sciences et sur des ensembles infinis :

porte sur 2 ou 1 propriétés

- (5) 1 prop. générique «*quiconque*»
- (6) 2 prop. générique «*tout, un,*»
- (7) 2 prop. accidentel «*chaque, tous les,*»
- (8) 1 prop., accidentel «*chacun*» *examples*



5. Données : «*pour tout*»

- (9) La CNIL envoie à tous les enseignants d'histoire-géographie [...] une édition spéciale de l'actu, le journal des 14-18 ans [...]
- (10) ...analyse fine des sons complexes, indispensable à tout musicien....
- (11) Par exemple, tous les atomes d'hydrogène ne comptent qu'un seul proton,...
- (12) Toutes les étoiles naissent de la même manière.
- (13) Toute suggestion est la bienvenue.



6. Un troisième coin du carré d'Aristote

Existentielle négative

(14) Nul n'est Père Noël.

(15) Personne n'est venu.

Ici encore, certaines formulations se font avec la restriction et d'autres non.

- 1 propriétés Personne Nul Aucun
- 2 propriétés Aucun Nul Rien



7. Le dernier coin : l'universelle négative

Universelle négative qui peut se formuler de deux manières quasi opposées,

- Tous les étudiants ne sont pas admis.
- Certains étudiants ne sont pas admis.

La première forme « *Tous ... ne ... pas* » est fortement ambiguë ; elle est parfois comprise comme « *Aucun ... ne ...* ».

On notera que l'universelle négative n'est pas lexicalisée : aucun mot ne signifie *pas tous*, et nous ne connaissons pas de langues dans lesquelles cette forme de quantification soit lexicalisée (tandis que l'existentielle négative est lexicalisée).




8. Quantifications mathématiques : \exists, \forall

- Comment démontrer/affirmer
 $\forall x t.q.R(x)$ on a $P(x)$ on montre/énonce la propriété $P(x)$ pour un x satisfaisant R quelconque.
 - Comment réfuter $\forall x P(x)$:
 - On trouve un élément z tel que $R(z)$ et $\neg P(z)$...
 - On peut rester au niveau intentionnel / conceptuel, réfuter P pour un sous concept de R
- Magie de la logique (1) classique (2) du premier ordre :
- «vrai pour tous» = «démontrable» = «non réfutable»



9. Utilisation en langue

- (16) Un chien reste un animal et donc imprévisible.
- (17) **Tous les chiens peuvent mordre.**
- (18) Non, pas Rex / le mien.
- (19) Non, pas les bassets.



Pour $\exists xP(x)$ il suffit d'inverser démontrer et réfuter, c.-à-d. de le voir comme $\neg\forall x\neg P(x)$.

Éventuellement d'ordre supérieur (quantification sur des propriétés, des propriétés de propriétés).
On notera que la théorie des ensembles ramène tout au premier ordre : un ensemble d'ensembles est un ensemble.



10. Extensions et raffinements

Si on pense que

- la double négation n'est pas tout à fait une affirmation « *Ce n'est pas faux* »,
- ou que les modalités, nécessité et possibilité sont utiles,
- ou que les types linéaires sont pertinents pour la sémantique lexicale, « *J'ai monté tous les livres de l'étagère au grenier, je les avais déjà lus.* » (2 copies de Mme Bovary)



11. Logiques non classiques

alors il faut étudier la quantification, modèles et preuves pour

- Logique intuitionniste
- Logique modale, par ex. $S4$
- Logique linéaire

Très joli travail de logique mathématique en perspectives.



Deuxième partie

Quantificateurs généralisés



12. Définissables... ou pas !

Définissables :

au moins deux : $\exists x \exists y x \neq y \wedge P(x) \wedge P(y)$

deux :

$\exists x \exists y x \neq y \wedge P(x) \wedge P(y) \wedge \forall u (P(u) \Rightarrow (u=x \vee u=y))$

au plus deux :

$\exists x \exists y P(x) \wedge P(y) \wedge \forall u (P(u) \Rightarrow (u=x \vee u=y))$

Non définissables :

«la majorité» des individus satisfont P

ainsi que «un nombre infini de», «un nombre fini de», «la plupart des»,



13. Preuves, réfutations et quantification généralisée

Une autre approche de la quantification : jeux.
Prouver contre Réfuter (logique intuitionniste,
Lorenz et Lorenzen)

- prouver/affirmer \forall : l'établir pour un individu générique
- réfuter \forall : trouver un terme qui contredit
- prouver/affirmer \exists : exhiber un terme
- réfuter \exists : établir un \forall



14. La majorité de, la plupart

(20) Les français ont voté Sarkozy en 2007.

(21) La plupart des français ont une télé.

La plupart combine les difficultés de «*la majorité de*», mais aussi de «*beaucoup*» : la plupart c'est nettement plus que la moitié, mais quand est-ce que cela commence ?

Usage très très fréquent

(«*les*» signifie souvent «*la plupart des*»)



15. Mesures

Modèles usuels : cardinalité...

Or :

(22) La plupart des nombres sont premiers

Réponse : NON

(23) La plupart des nombres ne sont pas premiers

Réponse : OUI

Même dans des ouvrages mathématiques avancés, on trouve cette formulation pour dire que la limite de la proportion de nombres premiers tend vers 0 c.-à-d. $\lim_{n \rightarrow \infty} |\{p | p \text{ premier } \leq n\}| / n = 0$.

Ce n'est pas une question de cardinalité, mais de mesure. Les maths proposent diverses notions de mesure.



16. Preuves utilisant «*La majorité de*»

Deux sortes de réfutations de «*la majorité des x satisfont A* » :

- «*Seulement très peu de x satisfont A* »
- «*La majorité des x satisfont une propriété incompatible avec A* »



Troisième partie

Remarques sur l'analyse humaine des quantificateurs



17. Le mystère de Henkin

Quantificateurs de Henkin :

(24) Un membre de chaque conseil de labo connaît un conseiller de chaque municipalité girondine.

(25) $\left(\frac{\forall l \quad \exists m}{\forall g \quad \exists c} \right) L(m,l) \text{ et } M(c,g) \text{ et } C(m,c)$

On en trouve, rarement, mais on en trouve !
Pourtant la vérification est très compliqué, la réfutation aussi : Vérifier ou réfuter une telle formule dans un modèle fini est un problème NP-complet.

Que veut dire le locuteur ?

Que comprend l'interlocuteur ?



18. Négatives existentielles et universelles

On sait aussi que pour les existentielle négatives («*personne, aucun, etc.*») se rend compte plus vite qu'elles sont fausses qu'on ne constate qu'elles sont vraies. Il faut imaginer ce que serai quelqu'un faisant ce qui est dit est comparer avec la situation pour voir si c'est compatible.

Pourquoi l'universelle négative n'est-elle jamais lexicalisées («*pas tous, tous ... ne ... pas, certains ... ne ... pas*») ?

Travail de Denis Delfitto sur l'analyse de la négation, la mémoire à court terme et la dyslexie.



19. Portées relatives, préférences

Portées respectives des quantificateurs :

- Un bus est affrété pour tous les participants.
- Tous les participants prennent un bus.
- Tous les participants prennent une voiture.
- Un voiture est proposée à tous les participants.

On observe une préférence pour l'ordre gauche droite sauf si le contenu lexical favorise le contraire.

Travaux de Mark Johnson (Sydney) et de Glyn Morrill (Barcelona) avec les grammaires de Lambek et l'analyse en réseaux de démonstration.



Quatrième partie

Conclusions et perspectives



20. Ébauche de questions abordables

Quels paramètres mesurent la complexité de compréhension dans nos modèles logiques :

- ordre de la quantification
- alternance de quantificateurs
- adéquation/opposition entre portée issue du sens et préférence syntaxique
- mélange entre concepts intentionnels et collection d'objets



21. Quelques objectifs ambitieux

Beaucoup de questions linguistiques et logiques :

- Les modèles logiques permettent-ils de mesurer la complexité linguistique ?
- Quels modèles, quelles preuves et réfutations pour les quantificateurs généralisés ?
- Quels modèles, quelles preuves et réfutations pour les logiques non classiques ?
- Quelles variations entre les différents modes de quantification ?

Du pain sur la planche !



Un de mes exemples préférés :

«If **all** roads lead to Rome, **most** segments of the transportation system lead to Roma Termini!»

Blog Ron In Rome

Questions?