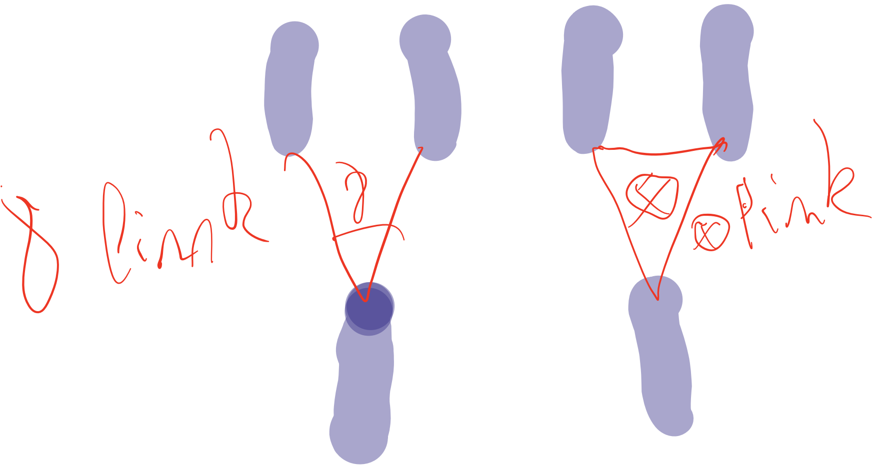
HANDSOME PROOF NETS

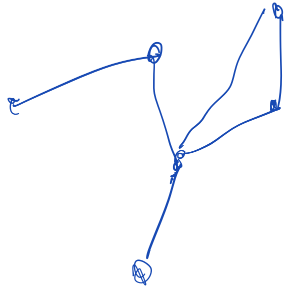
Journée réseaux 22 janvier 2021

GRAPHES BICOLORES (COUPLAGE PARFAIT+ LIENS)

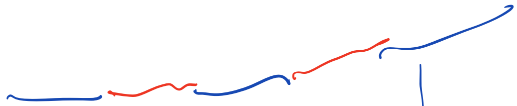
Cographs

- Couplage ensembre d'arêtes deux à deux non adjacente.
- Parfait: une arête du couplage est incidente à chaque point.
- Critère: pas de cycle élémentaire alternant





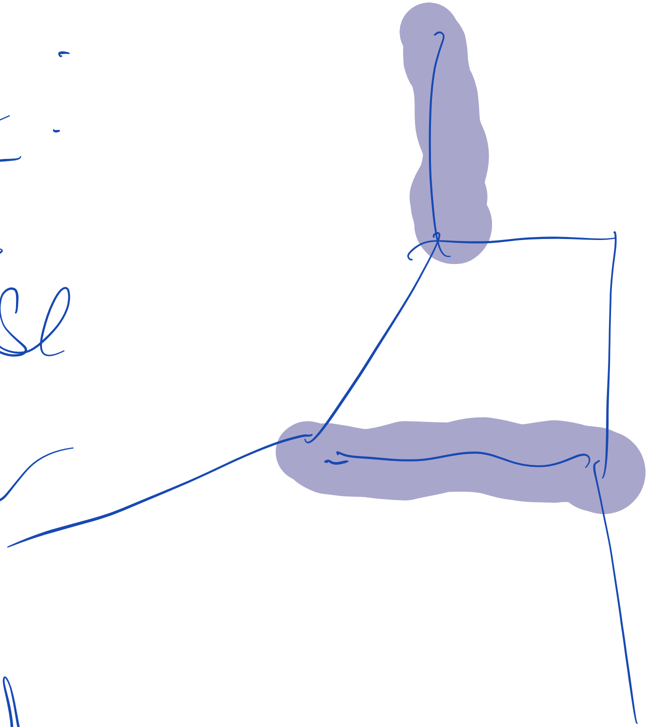
non elementary



alternatory

matching:

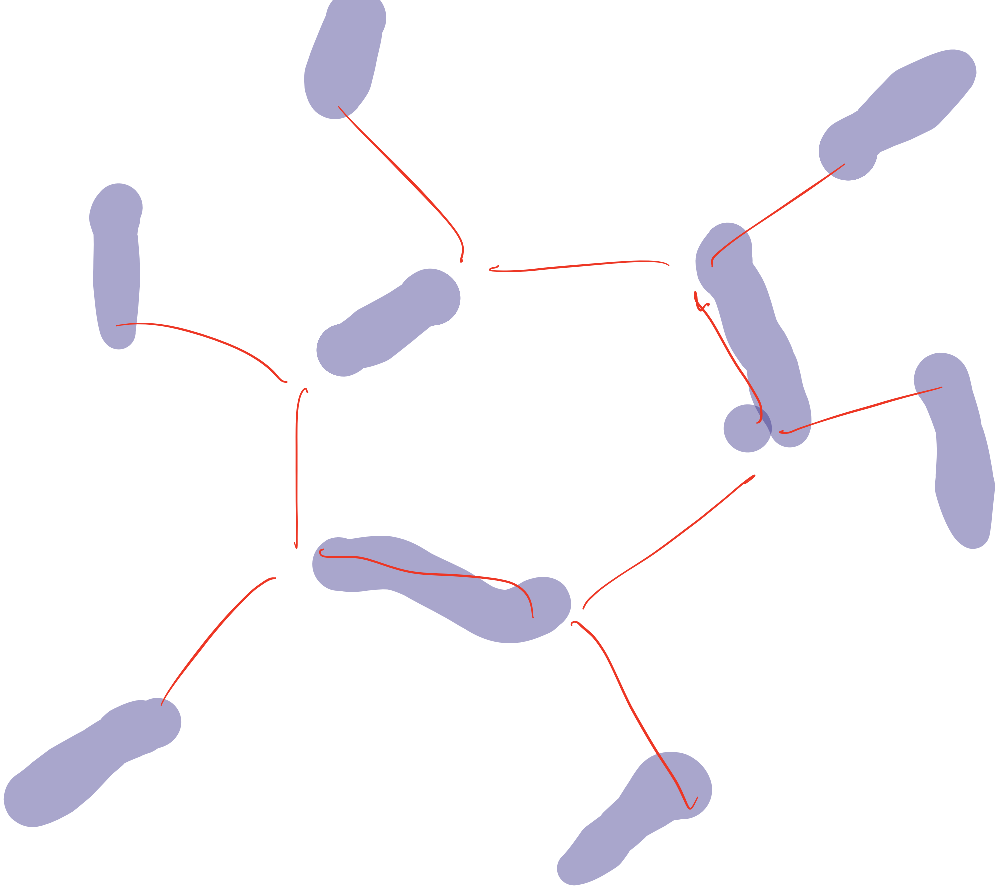
set of pairwise non adjacent edges



perfect whenever every vertex is free end vertex of an edge in the matching.

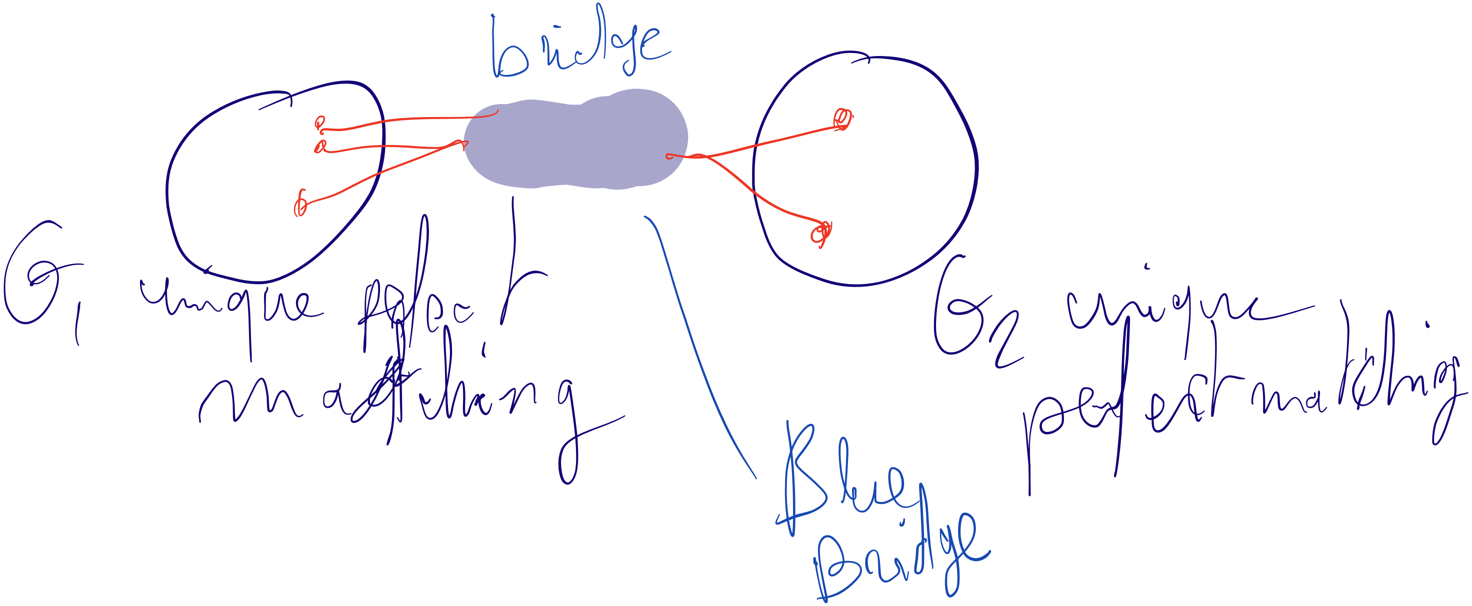
LEMME CENTRAL:
AECF ⇔ UNICITÉ DU COUPLAGE ⇔ DÉF. INDUCTIVE

- Un graphe est muni d'une unique couplage parfait si et seulement si il n'y pas de cycle élémentaire alternant les arêtes du couplages et les arêtes hors-couplage
  Retoré 93… mais Berge l'avais vu bien avant ☺
- Equivalent à le graphe appartient à la plus petite classe AECF (AE cycle free) définie inductivement par:
  - Graphe à une arête, incluse dans le couplage
  - Clos par: on prend GA, GB deux graphes de AECF on ajoute:
    - Deux points A, B
    - Une arête AB dans le couplage,
    - Des arêtes entre A et des points de GA (autant qu'on veut)
    - Des arêtes de entre B et des points de GB (autant qu'on veut)
- Tout graphe de AECF est AECF: ok Retoré 93 (et sans doute Kotzig 59 en slovaque)
- Si G dans AECF, alors G contient un isthme du couplage - Retoré 93, merci à G. Zémor, J.Cl. Bermond

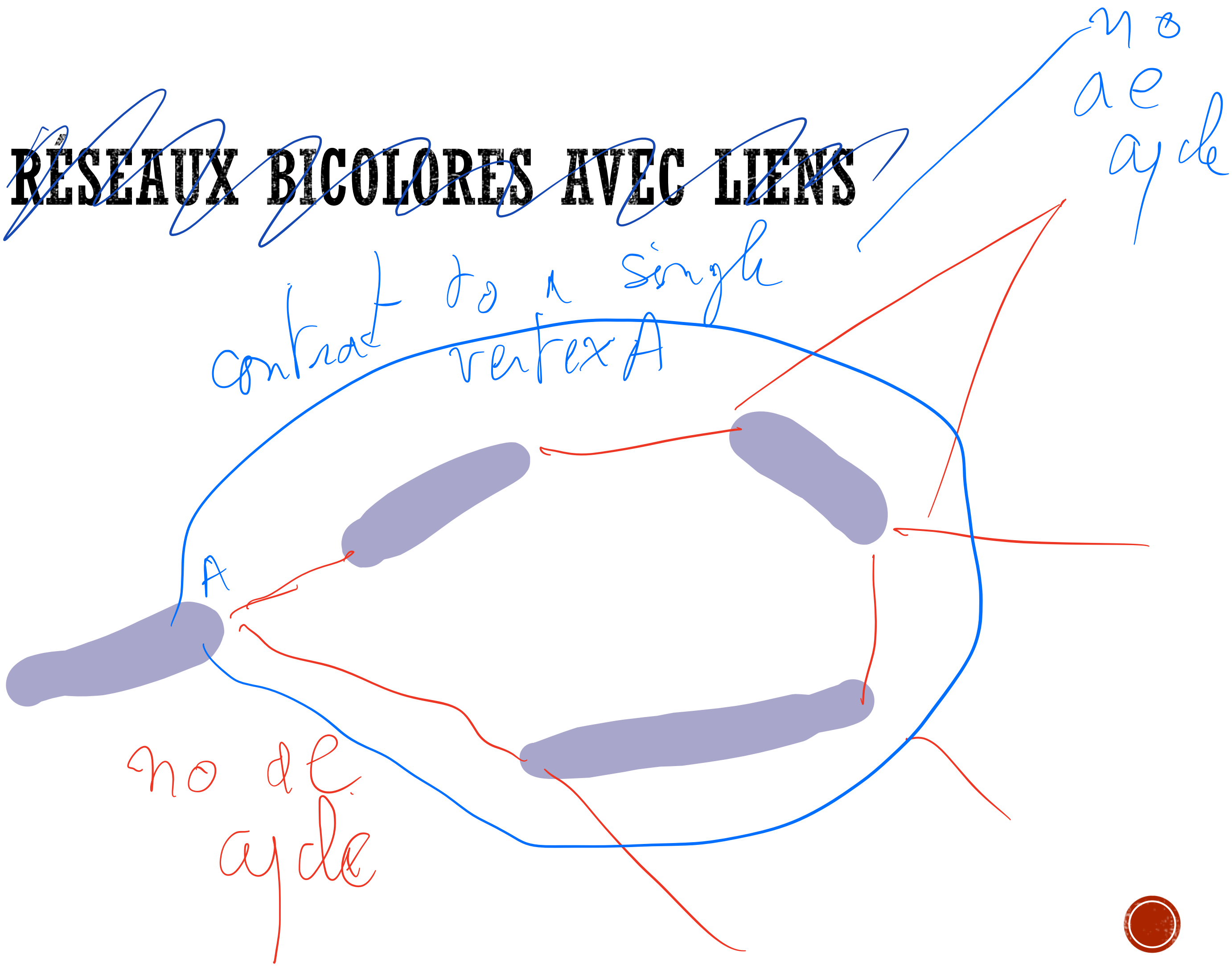


EXPLICATIONS AECF $\Leftrightarrow$ UNICITÉ COUPLAGE

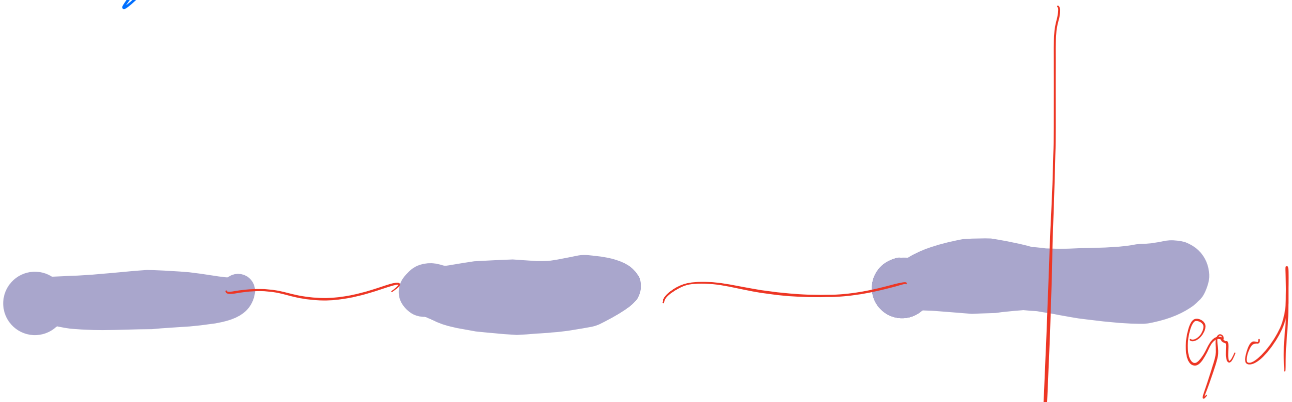
AECF ⇔ DANS LA CLASSE AECF



~~RESEAUX BICOLORES AVEC LIENS~~



SÉQUENTIALISATION DIRECTE

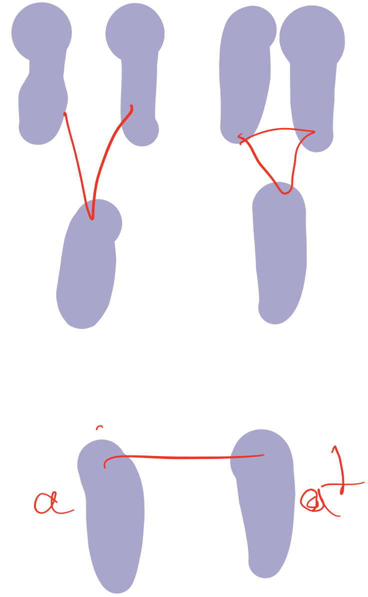


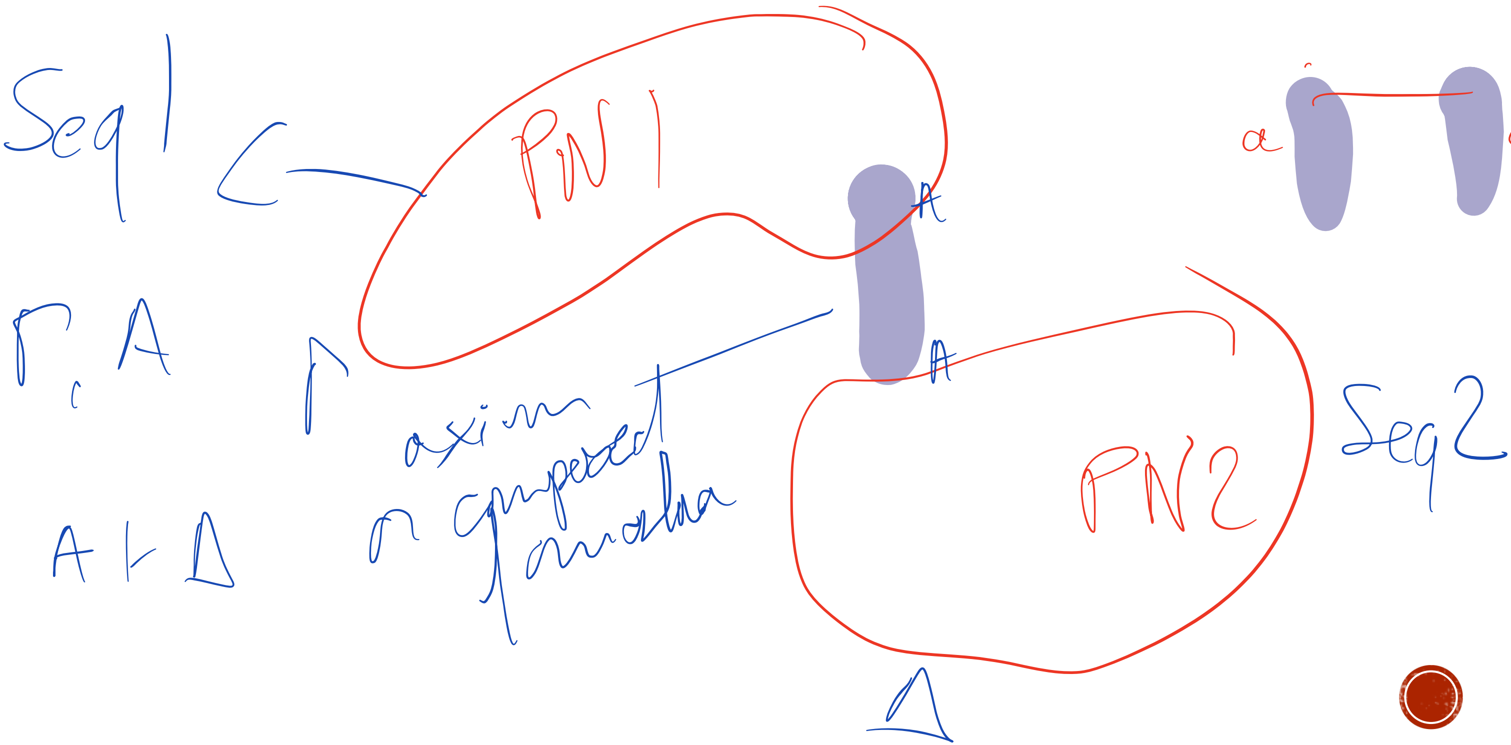
Bridge

expension of the sequential structure

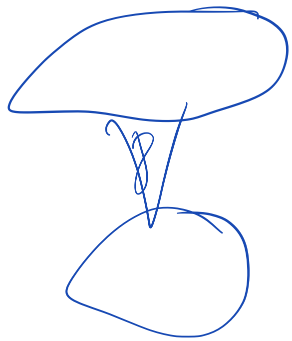
→ bridge in the

SÉQUENTIALISATION À LA GIRARD
TENSEUR SCINDANT

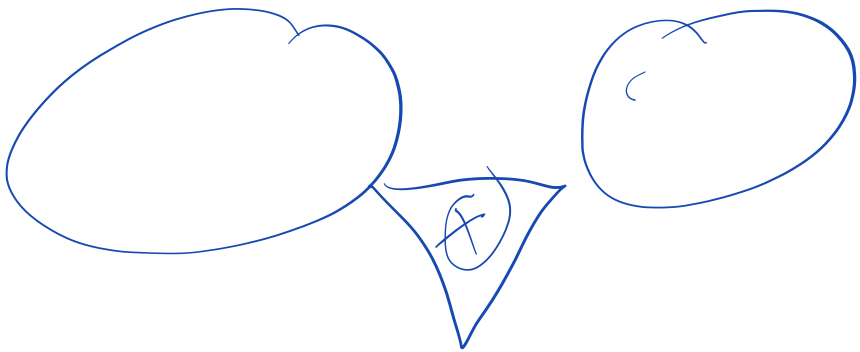




SÉQUENTIALISATION À LA DANOS PAR SCINDANT



+ splitting time

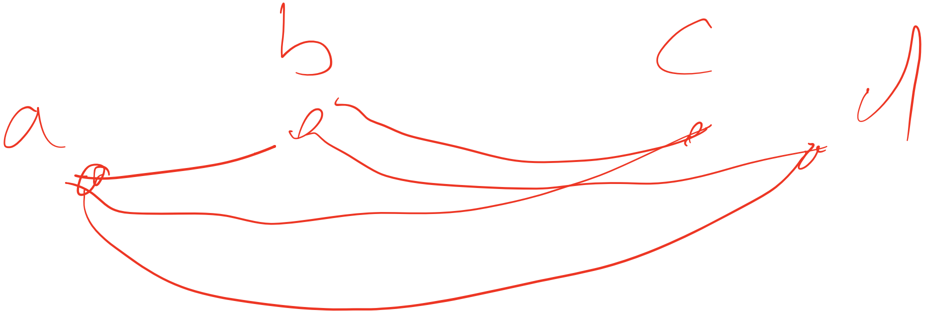


COGRAPHES

links are cographs

- Cographes = classe de graphes contenant les graphes à un point et close par somme disjointe et composition en série.
  - $(V,E) \parr (V',E') = (V+V', E+E')$ (+ union disjointe)
  - $(V,E) \otimes (V',E') = (V+V', E+E'+VV')$

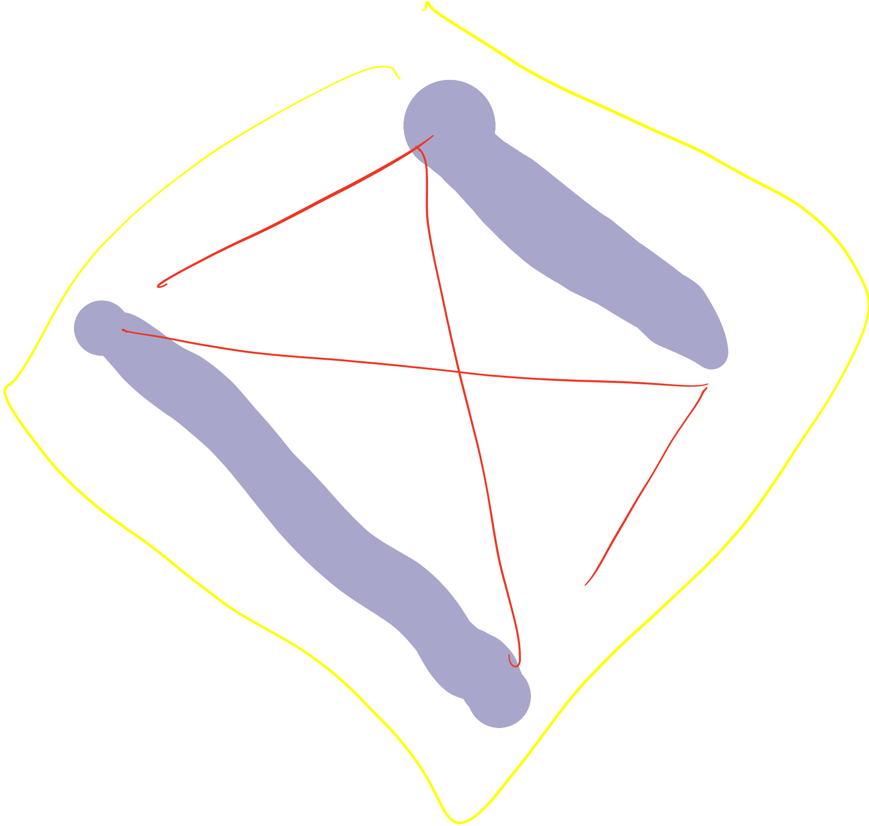
- Caractérisés par absence de P4
- Un cographe se décrit par un terme UNIQUE modulo l'associativité et la commutativité de $\parr$ et de $\otimes$



$(a \otimes b) \otimes (c \otimes d)$

HANDSOME PROOF NETS COGRAPHE + COUPLAGE PARFAIT

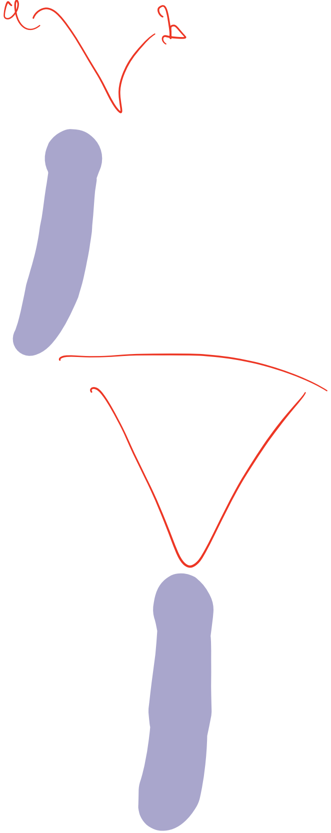
- Cographe: la formule
- Couplage parfait les axiomes
- Graphe qui représente fidèlement la preuve:
  en plus de d'habitude , ordre des règles, associativité et commutativité des connecteurs deviennent l'égalité
- Critère:
  - Tout cycle ae contient une corde
  - Pas MIX ⇔ un chemin ae entre toute paire de point

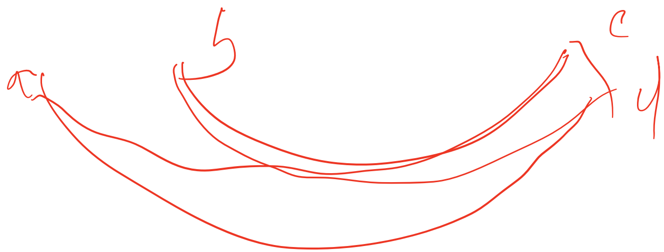


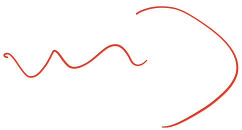
$(a\gamma a^{-1})(ab\gamma b^{-1})$

FOLD UNFOLD
PLIAGES ET DÉPLIAGES

- Préservent la correction
- On passe progressivement de
  - Réseau bicolore avec liens
  - Beau réseau
- Et vice versa!







whenever they
meet n a times

$G_1 \xrightarrow{\text{rewrites}} G_2$

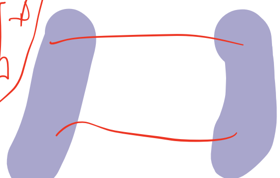
whenever

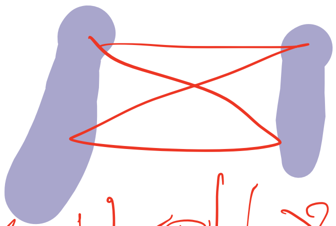
$G_1 \subset G_2$

RÉÉCRITURE

- Inclusions des cographes axiomatisée par la réécriture de cotermes Bechet de Groote Retoré 97 RTA
- Récriture de termes interchange law (modulo commutativité et associativité)
  - 4 ⊗ ⅋: (a ⅋ b) ⊗ (c ⅋ d) → (a ⊗ c) ⅋ (b ⊗ d) (incorrect)
  - 3 ⊗ ⅋ : a ⊗ (c ⅋ d) → (a ⊗ c) ⅋ d (=mll!)
  - 2 ⊗ ⅋: (a ⊗ d) → (a ⅋ d) (mix)
- Inclusion et correction
  - 3 préserve la correction
  - 3 et 2 préserve la correction avec mix
  - 4 ne préserve PAS la correction

$(a \otimes b) \parr (a^\perp \otimes b^\perp)$ ko





$(a \parr a^\perp) \otimes (b \parr b^\perp)$ ok

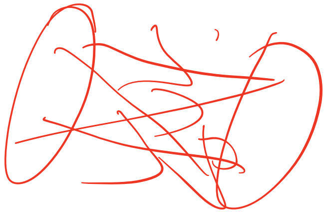
PREUVES PAR RÉÉCRITURE

- AXn : axiome, c'est-à-dire graphe complet: $\bigotimes_i (a_i \parr \tilde{a}_i)$
- 3 permet elle d'obtenir de AXn toutes les preuves de MLL? Yes
- 3 et 2 permettent elles d'obtenir de AXn toutes les preuves de MLL+mix? Yes

ELIMINATION DES COUPURES

- Décomposition des coupures : réécriture
- Suppression des axiomes OK aussi.

COGRAPHES ORIENTÉS



- Cographes orientés
  - (V,E) ⅋ (V',E') = (V+V', E+E') (+ union disjointe)
  - (V,E) $\otimes$ (V',E') = (V+V', E+E'+VV')
  - (V,E) < (V',E') = (V+V', E+E'+V<V') (arcs de V vers V')
- Caractérisation:
  - Partie symétrique : cographes (pas de P4)
  - Partie orientée: ordre série parallèle (pas de N)
  - Entre ces deux parties transitivité faible: transitif dès que
    - deux arcs se suivent, a<b b<c => a<c
    - un arc et une arête se suivent a<b b-c => a<c
    - une arête et un arc se suivent a-b b<c => a<c
- Inclusion caractérisée par réécriture TOUTES les instances de 4*+ (a + b) * (c + d) → (a * c) + (b * d) avec * plus fort que +:
- $\otimes$ ⅋ et $\otimes$ < et < ⅋ attention < n'est pas symétrique.

HANDSOME PN POUR POMSET LOGIC

- Cographe orienté
- Tout circuit (cycle orienté) élémentaire alternant contient une corde.
- Réécriture d'inclusion préserve la correction
- → Elimination des coupures
- Fold unfold préserve la correction
  il y a aussi des réseaux avec liens
  calcul des séquents ne dérive pas tout
  Slavnov 2019 deux < un plutôt par, un plutôt tenseur
- Calcul par réécriture : calculus of structures,
  equivalent à SBV (retoré 2020)
  (mais pomset logic fait plus cf. Tito Nguyen & Lutz Strassburger)

- (correction ⇔ interprétation cohérente=clique)