Logique linéaire et réseaux de Petri

Christian Retoré LIRMM Univ Montpellier
Avec une pensée émue pour Philippe Darondeau (INRIA Rennes) décédé en 2013

Plan

- Logique linéaire
  - Un raffinement de la logique intuitionnisme quand preuves=programmes et normalisation=exécution
  - Implication linéaire: changement d'état
- Codage « standard » des réseaux de Petri
  - Limites
- Codage de l'exécution parallèle des réseaux de Petri

Origines: interprétation du polymorphisme à la ML

$$\dfrac{\pi}{A \vdash B} \quad \xrightarrow[\text{normalisation}]{\beta\text{-réduction}} \quad \dfrac{\pi^0}{A \vdash B}$$

$$A \xrightarrow{[\![\pi]\!] = [\![\pi^0]\!]} B$$

J'avoue ne pas encore bien maîtriser le stylet ....

Espace cohérents (Girard 1985)
Variante des domaines typés de Scott

- Espace cohérent: graphe simple dénombrable
- Formule/type -> Espace cohérent
- Preuve/objet -> clique de l’espace cohérent
- Fonction de A dans B / preuve de A |- B
- (Approximants finis, fonctions stables Berry)
- Morphisme de A dans B (envoie 1 clique sur 1 clique)
- Mais aussi objet de l’espace cohérent [A->B]

Espaces cohérents
-> interprétation du polymorphisme

- Foncteur X-> T[X]   X: variable de type
- Représentable par un espace cohérent T[]
- Interprétation du type $\prod$X. T[X]
- Graphe dénombrable dont les points sont tous les espaces cohérents finis.

Décomposition de l’implication intuitionniste

- Pourquoi parler des espaces cohérents?
- A->B fonctions stables de A dans B
- A—> B = (!A) —o B
- !A espace cohérent dont les points sont les cliques finies de A
- —o fonction/implication linéaire (qui consomme ses arguments/prémisses, bien plus simple que —>)

Multiplicatifs et additifs

- Connecteur multiplicatif A*B
  - Points: couples de points de A et de B
  - Cohérence (a,b) (a’,b’) de deux couples en fonction de la cohérence de a et a’ sur A et de b et b’ sur B
  - Implication linéaire, et (tenseur), ou (par)
- Connecteur additif A#B
  - Points: points de A et de B (somme disjointe)
  - Même cohérence que sur À, que sur B, et « tout ou rien » entre A et B: deux connecteur, et (&) ou (+)

Négation

- Opération facile:
- Graphe G —> Graphe complémentaire ~G
- Négation involutive
- Transforme conjonction multiplicative en disjonction multiplicative et vice versa.
- Idem pour la conjonction et la disjonction additive.

Exponentielles (modalités)

- !A cliques finies de A
- Deux cliques sont cohérentes quand elle sont incluses dans une sur clique
- ?A par dualité
- Exponentielle: transforme un connecteur additif en connecteur multiplicatif.

Interprétation naïve des connecteurs linéaires (d'après leur comportement dans espaces cohérents)

- Séquents A,B,C |-X
  - « , » à gauche : (X)   Si plusieurs formules à droite « , » ||
  - |- implication linéaire
- A,A|-A NON DÉMONTRABLE
- A,B |-A NON DÉMONTRABLE
- A|- A(X)A NON DÉMONTRABLE
- A|- X ne permet pas de déduire A, B |- X

Règles de la logique linéaire (intuitionniste)

$$\cancel{\frac{\Gamma \vdash X}{\Gamma, H \vdash X}} \qquad \cancel{\frac{\Gamma, H, H \vdash X}{\Gamma, H \vdash X}}$$

Règles de la logique linéaire intuitionniste

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash X}{\Gamma, A \otimes B \vdash X}$$

Règles de la logique linéaire intuitionniste

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}$$

$$\frac{\Gamma, B \vdash X \qquad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta, A \multimap B \vdash X} \quad \text{ou} \quad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash A \multimap B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

Règles de la logique linéaire intuitionniste

$$\frac{\Gamma \vdash X}{\Gamma, !A \vdash X} \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \vdash X}{\Gamma, !A \vdash X} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash X}{\Gamma, !A \vdash X}$$

$$\frac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A}$$

$!A \multimap 1$

$!A \multimap !A \otimes !A$

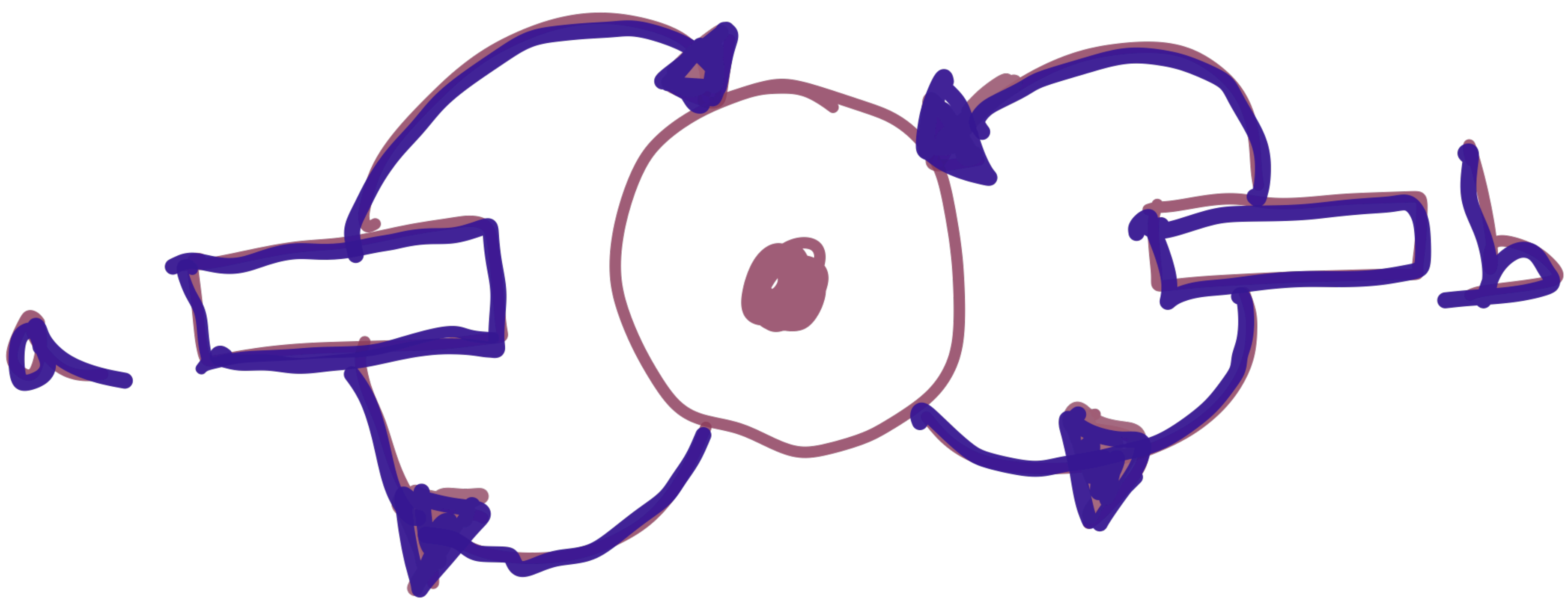
$!A \multimap A$

Réseau de Petri

- Places
- Contenant des jetons
- Transition Ti
  - Consomme Npi jetons dans la place p
  - Met Nqi jetons dans place q
  - Si pas assez de jetons dans la place p, la transition ne peut avoir lieu
  - Marquage : nombre de jetons par place
  - Accessibilité : on peut effectuer des transitions pour passer du marquage initial à un marquage: décidable, complexité à l’étude (J. Leroux)

2 sortes d'exécutions

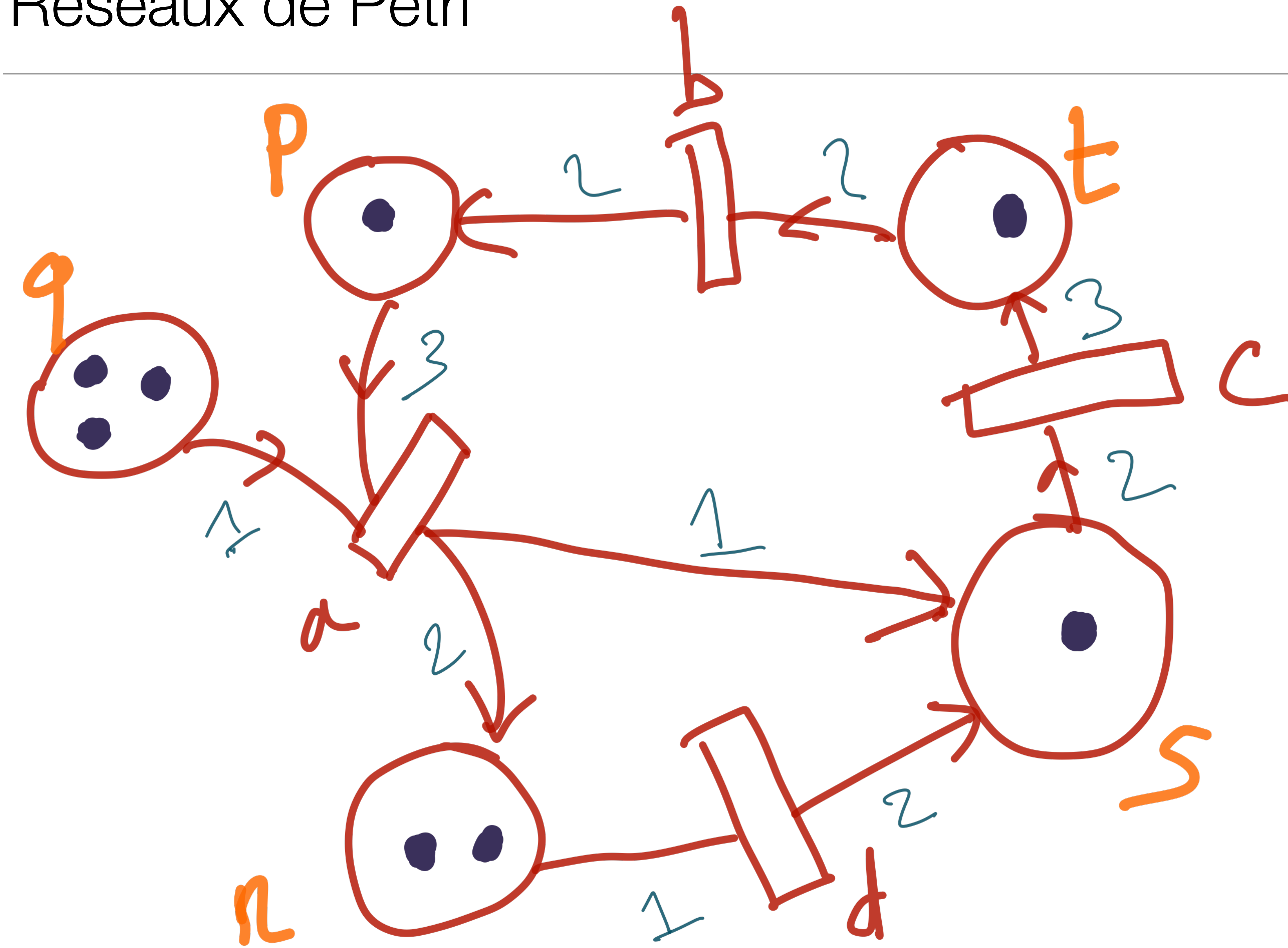
a en même temps que b :   KO



$a \| b = a ; b \oplus b ; a$ OK

↳ "ou" non déterministe

Réseaux de Petri



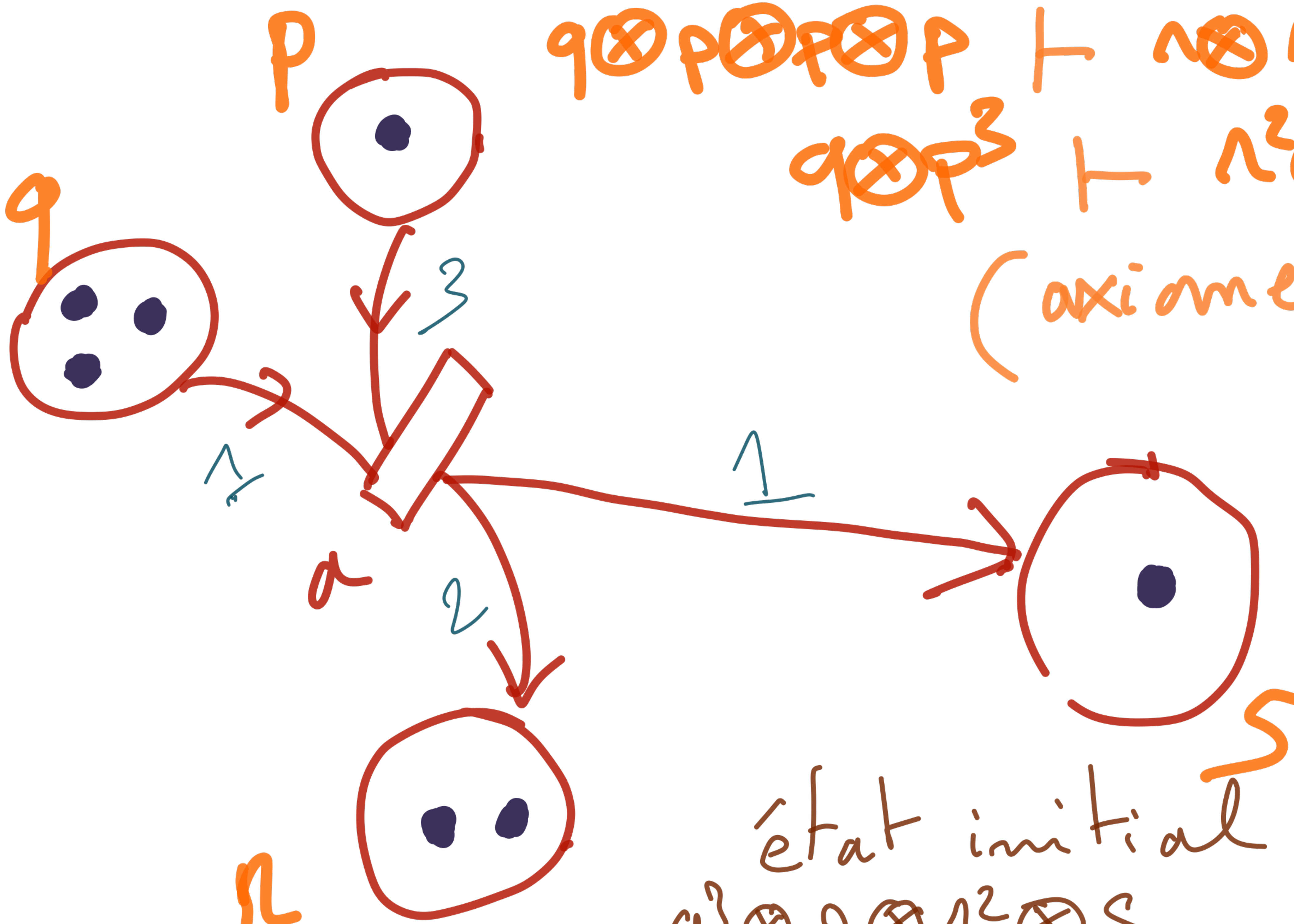
Codage transitions et états

transition a

$q \otimes p \otimes p \otimes p \vdash r \otimes r \otimes s$,

$q \otimes p^3 \vdash r^2 \otimes s$

(axiomes)



état initial

$q^3 \otimes p \otimes r^2 \otimes s$

Accessibilité ~prouvabilité

$M_0 \longrightarrow M_1$

ssi

$\vdash M_0$ — axiomes transitions $M_i \vdash M'_i$

$\exists$ preuve

$M_0 \vdash M_1$

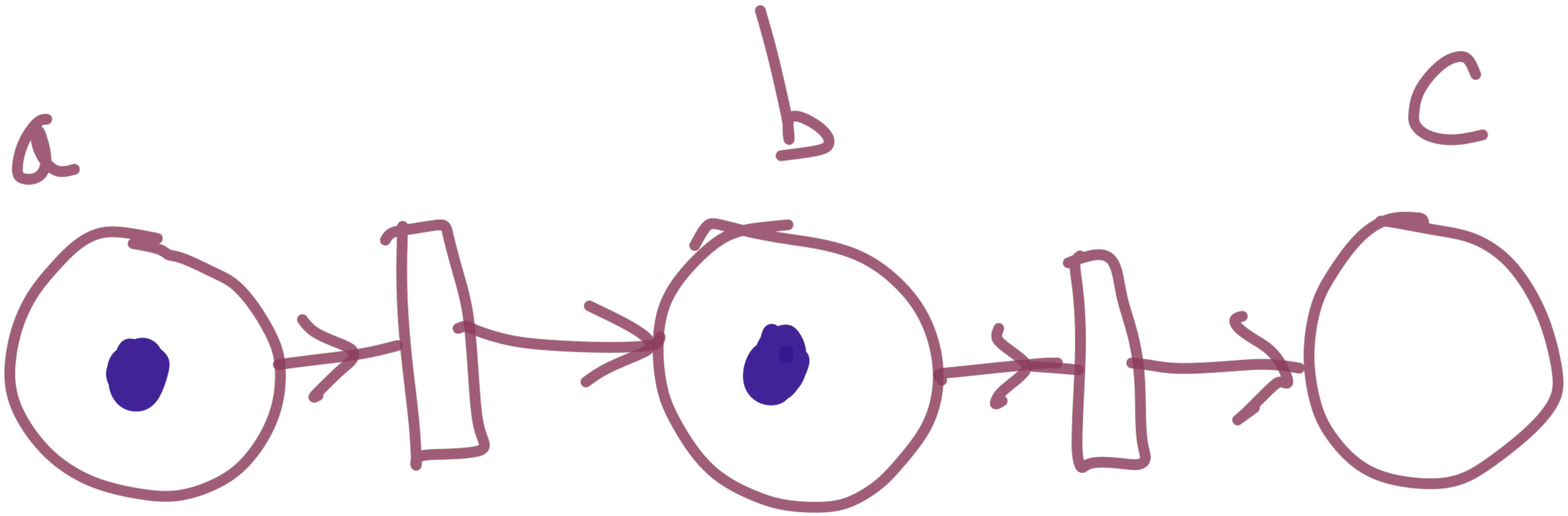
Gehlot & Gunter Petri nets as tensor theories

- Formules: que des tenseurs (marquages)
- Axiomes pour les transitions
- Accessibilité = prouvabilité
- Règles simplifiées:

$$\text{cut}\ \frac{M \vdash M' \quad M' \vdash M''}{M \vdash M''} \qquad \frac{M \vdash M' \quad N \vdash N'}{M \otimes N \vdash M' \otimes N'}\ \text{synchro}$$

Codage: accessibilité ~ prouvabilité

/ordre
/des transitions?



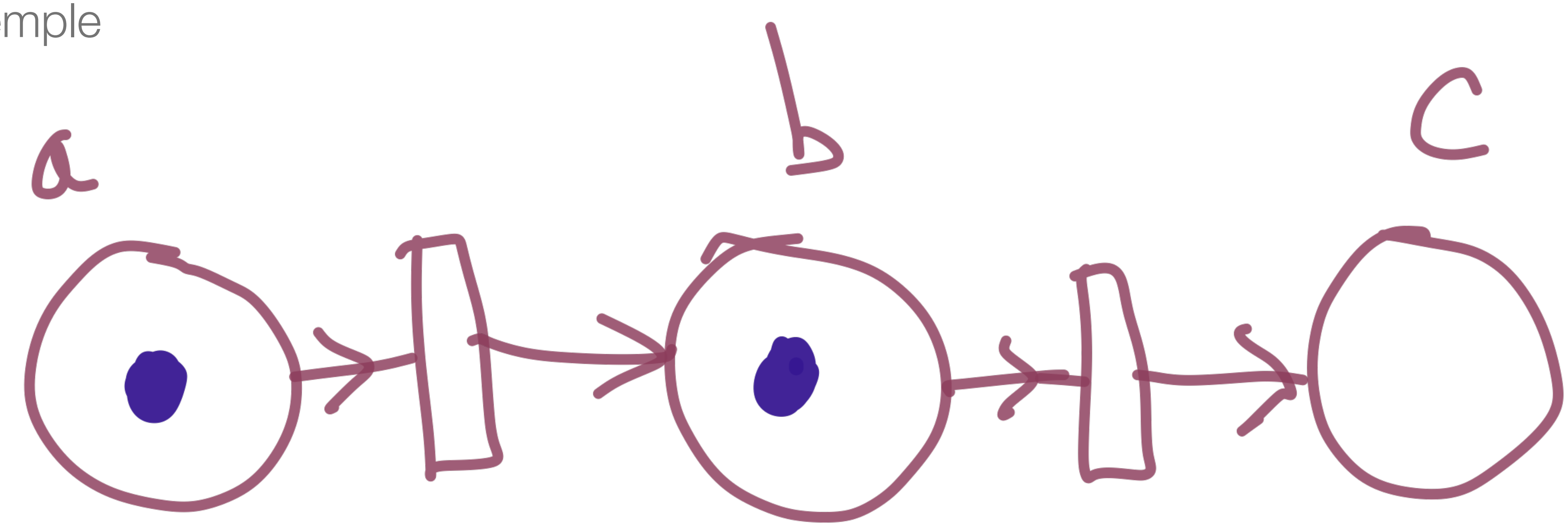
Notion de preuve "normale"

→ exécution la plus parallèle

(coupure les plus hautes)

Parallélisme structurel: OK
Parallélisme dû au marquage ???

- Exemple



- Preuve “normale”:

$$\dfrac{\dfrac{a \vdash b \quad b \vdash c}{a \vdash c}\,\text{cut} \qquad b \vdash b}{a \otimes b \vdash c \quad a \otimes b \vdash b \otimes c}\,\text{synch}$$

mieux :

$$\dfrac{a \vdash b \quad b \vdash c}{a \otimes b \vdash b \otimes c}\,\text{synch}$$

- Pas la plus concurrente!

LICS 1-2 Laiterie Garonnaise

Autre formulation sans axiome
(Équivalente du point de vue de l'accessibilité)

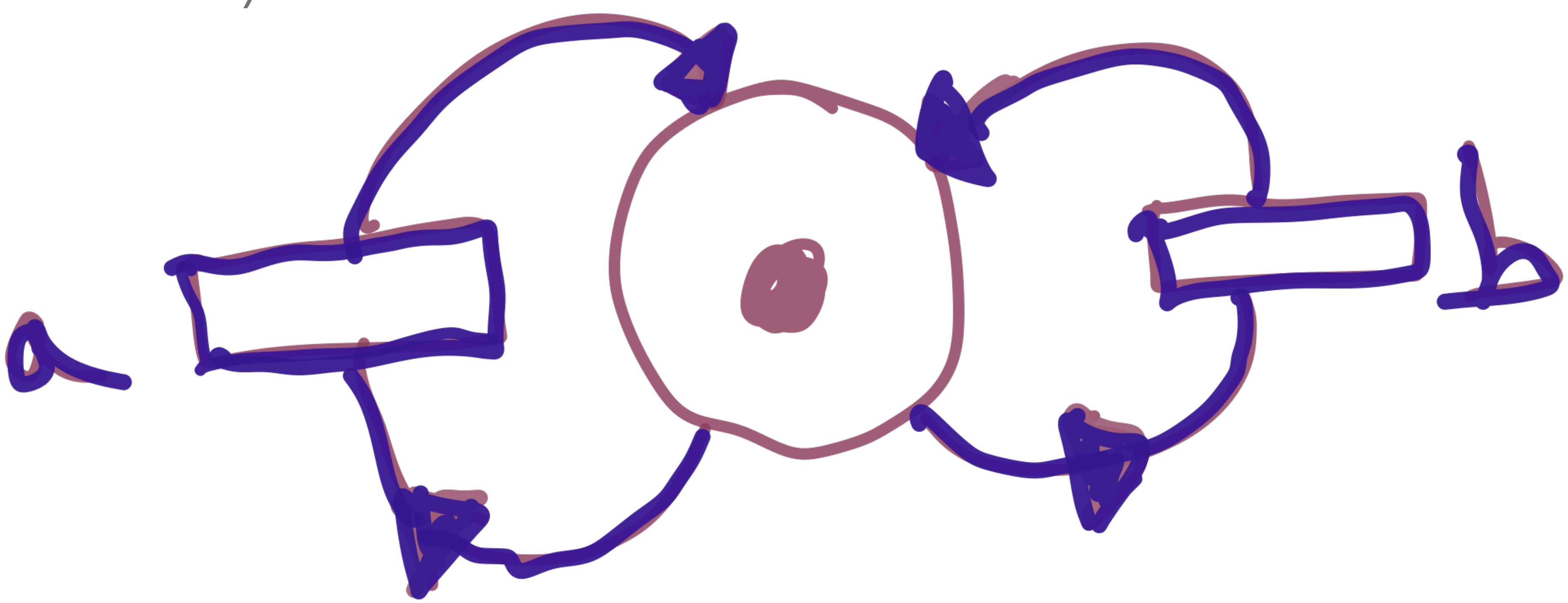
$$\underbrace{M_0}_{\text{marquage initial}},\ \underbrace{!(M_i \multimap M'_i),\ !(M_j \multimap M'_j)}_{\text{transition}},\ \dots \vdash \underbrace{M_1}_{\text{marquage final}}$$

démontrable en Logique Linéaire
sans axiomes

Modélisation sans axiomes: ordre des transitions?

- Accessibilité équivalente à prouvabilité en LL, ok.
- Mais l'ordonnancement des transitions n'est pas aussi lisible dans les preuves avec cut/synchr et axiomes (= transitions)
- Les règles $\multimap$ à gauche correspondent à une transition, il faut étiqueter temporellement les jetons consommés et produits (Robert Valette)

Exécution vraiment concurrente (truly concurrent)

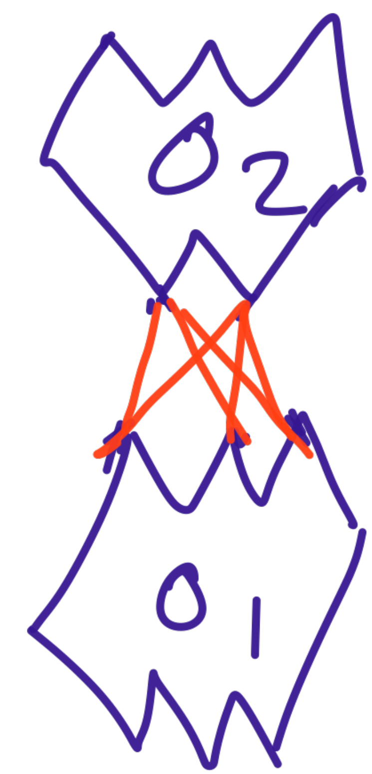
- Ordre partiel sur les transitions on exécute simultanément toutes les transitions minimales, puis les suivantes etc. (Step transition)
- 

a||b impossible

Ordre série parallèle (caractérisation: sans N)

- Ordre SP terme unique || et < associatif, || commutatif
- Un point est un ordre SP
- Étant donnés deux ordres SP leur sommes disjointe est un ordre SP (composition en parallèle)
- Étant donnés deux ordres SP un ordre précède l’autre est un ordre SP (leur composition en série)

$O_1 \| O_2$



$O_1 < O_2$

Logique linéaire partiellement commutative

- Ordre série parallèle de formule |- une formule
- Ordre SP -> ordre SP plus contraint : OK
- Connecteurs —o / \ implications (x) * conjonctions

Règles (conjonctions, coupure)

Product/conjunction rules	
$\dfrac{\Gamma[(A;B)] \vdash C}{\Gamma[A \odot B] \vdash C}\ \odot_h$	$\dfrac{\Delta \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{(\Delta;\Gamma) \vdash A \odot B}\ \odot_i$
$\dfrac{\Gamma[\{A,B\}] \vdash C}{\Gamma[A \otimes B] \vdash C}\ \otimes_h$	$\dfrac{\Delta \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\{\Delta,\Gamma\} \vdash A \otimes B}\ \otimes_i$

Unit rules	
$\dfrac{\Gamma \vdash C}{\{\Gamma, \mathbf{1}\} \vdash C}\ \mathbf{1}_h$	$\dfrac{}{\vdash \mathbf{1}}\ \mathbf{1}_i$

Cut rule
$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Delta[A] \vdash B}{\Delta[\Gamma] \vdash B}\ cut$

Règles (implications)

Implication rules	
$\dfrac{\Gamma[B] \vdash C \quad \Delta \vdash A}{\Gamma[\{\Delta, A \multimap B\}] \vdash C} \multimap_h$	$\dfrac{\{A, \Gamma\} \vdash C}{\Gamma \vdash A \multimap C} \multimap_i$
$\dfrac{\Gamma[B] \vdash C \quad \Delta \vdash A}{\Gamma[(\Delta; A \setminus B)] \vdash C} \setminus_h$	$\dfrac{(A; \Gamma) \vdash C}{\Gamma \vdash A \setminus C} \setminus_i$
$\dfrac{\Gamma[B] \vdash C \quad \Delta \vdash A}{\Gamma[(B \,/\, A; \Delta)] \vdash C} /_h$	$\dfrac{(\Gamma; A) \vdash C}{\Gamma \vdash C \,/\, A} /_i$

Propriétés de PCMLL (intuitionniste)

- Première idée De Groote (1996) ordre linéaires
- Ordre partiels, inclusion des ordres séries parallèles
- Élimination des coupures (Retoré 1999)
- Normalisation de la déduction naturelle (Amblard, Retoré 2010)
- Version classique Abrusci, Ruet 2000.

Codage des réseaux de Petri

- Marquages: p (X) q (X) q (pas de changements)
- Transitions marquage \ marquage
- Implication non commutative —> ordre dans le temps

Exécution dans PCMLL (Retoré 1999)

- (M; SP(ti)) |- M’
  - SP(ti): ordre série parallèle de transition, une transition pouvant apparaître plusieurs fois
- SSI
- la « step transition » de SP(ti) conduit du marquage M au marquage M’

Commentaires et perspectives

- Surtout un travail sur les ordre finis (logique ~ MLL)
- Utilisation de l’autre implication non commutative / : Transition à crédit?
- Utilisation grammaticale de ce travail:
- Traits fournis et consommés par les grammaires (comme dans le minimalisme de Chomsky)
- Utilisation en argumentation (liée au réseaux de Petri)?