La "non-non" traduction de Gödel-Kolmogorov entre logique classique (NK) et logique intuitionniste (NJ)

Richard Moot and Christian Retoré

29 octobre 2007

On définit inductivement la non-non traduction $F^{\neg\neg}$ d'une formule F

$$\begin{aligned}
\perp^{\neg\neg} &= \perp \\
at^{\neg\neg} &= \neg\neg at \\
(A \wedge B)^{\neg\neg} &= A^{\neg\neg} \wedge B^{\neg\neg} \\
(A \to B)^{\neg\neg} &= A^{\neg\neg} \to B^{\neg\neg} \\
(\forall x.A)^{\neg\neg} &= \forall x.A^{\neg\neg} \\
(A \vee B)^{\neg\neg} &= \neg\neg(A^{\neg\neg} \vee B^{\neg\neg}) \\
(\exists x.A)^{\neg\neg} &= \neg\neg\exists x.A^{\neg\neg}
\end{aligned}$$

On pourra omettre les quantificateurs dans un premier temps.

NJ désigne la déduction naturelle usuelle, intuitionniste.

NK désigne la déduction nautrelle classique, c.-à-d. NJ enrichie du tiers exclu (*tertium non datur*), ou du raisonnement par l'absurde (*reductio ad absurdum*), qui sont équivalents.

(a) Montrer que $\neg\neg F^{\neg\neg} \vdash^{\mathrm{NJ}} F^{\neg\neg}$ par induction sur les formules obtenues par la traduction $^{\neg\neg}$.

(b) Montrer que $\Gamma^{\neg\neg} \vdash^{\mathrm{NJ}} F^{\neg\neg} \Rightarrow \Gamma \vdash^{\mathrm{NK}} F$ en remarquant que NK permet d'ajouter et de supprimer des doubles négations et que les règles de NJ sont des règles de NK.

(c) Monter par induction sur la preuve dans NK que $\Gamma \vdash^{\mathrm{NK}} F \Rightarrow \Gamma^{\neg\neg} \vdash^{\mathrm{NJ}} F^{\neg\neg}$.

(d) Conclure.