MASTER INFORMATIQUE 2e ANNÉE
UE LOGIQUE ET LANGAGES
DEVOIR SURVEILLÉ DU MERCREDI 9 NOVEMBRE 2011

⋆ ⋆ ⋆

PARTIE *Lambda calcul et déduction naturelle* (CH. RETORÉ)

⋆ ⋆ ⋆

CE SUJET COMPORTE 1 PAGE

Exercice I *(1er ordre)*

Donner une preuve de $((A \wedge B) \to C) \to (A \to (B \to C))$ et de $(A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)$

Si les preuves sont vues comme des fonctions via l'isomorphisme de Curry-Howard, avec $U \wedge V$ correspondant au produit cartésien $U \times V$ et $U \to V$ correspondant à l'ensemble des fonctions de U and V à quoi correspond cette équivalence?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_2 \quad [B]_1}{(A \wedge B)} \quad ((A \wedge B) \to C)}{C}\to_e}{(B \to C)}\to_i 1}{A \to B \to C}\to_i 2$$

$$\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]_1}{B}\pi_2 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]_1}{A}\pi_1 \quad A \to (B \to C)}{(B \to C)}}{C}}{(A \wedge B) \to C}\to_i 1$$

Exercice II *(1er ordre)*

Donner une formule écrite avec seulement des implications (langage $\bot, \to$ avec $\neg A \equiv A \to \bot$) qui soit démontrable en logique classique et qui ne le soit pas en logique intuitionniste.

La démontrer en déduction naturelle en ajoutant le principe du tiers exclu ($A \vee \neg A$ pour tout A).

$((A \to \bot) \to \bot) \to A$ est démontrable en logique classique, c.-à-d.avec le tiers exclu, on peut procèder ainsi:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash A \vee (A \to \bot) \qquad A \vdash A \qquad \dfrac{(A \to \bot) \vdash (A \to \bot) \quad ((A \to \bot) \to \bot) \vdash ((A \to \bot) \to \bot)}{(A \Rightarrow \bot), ((A \to \bot) \to \bot) \vdash A}\to_e}{((A \to \bot) \to \bot) \vdash A}\vee_e 1}{\vdash ((A \to \bot) \to \bot) \to A}\to_i$$

Cependant $((A \to \bot) \to \bot) \to A$ n'est pas démontrable en logique intuitionniste. Aucune justification n'était demandée, mais on peut soit montrer qu'il n'y a pas de preuve normale de cette formule, soit construire un modèle de Kripke où elle est fausse, soit utiliser des ouverts de R: en prenant $||A|| =]1,2[\cup]2,3[$ on obtient alors
$||((A \to \bot) \to \bot)|| =]1,3[\not\subset ||A||$.

Exercice III *(1er ordre)*

Existe-t-il un terme de type $(a \to a) \to a$? Si oui en donner un et sinon dites pourquoi.

Non il n'en existe pas. S'il en existait un, $(a \to a) \to a$ serait démontrable en logique intuitionniste et donc en logique classique. Et si elle était démontrable en logique classique, elle serait vraie pour toute valuation. Or pour $a = 0$ on a $(a \to a) \to a = 0$.

Exercice IV *(2nd ordre)*
Existe-t-il un terme de type $\Pi X.\ X$? Si oui en donner un et sinon dites pourquoi il n'en existe pas.

Non il n'en existe pas. S'il en existait un, $\Pi X.\ X$ serait démontrable en logique intuitionniste et donc en logique classique. Etant fausse, elle n'est pas démontrable.

Exercice V *(programmation en lambda calcul du second ordre)*
On rappelle les types de données usuels:

- $Bool \equiv \Pi X. X \to (X \to X)$ avec $true = \Lambda X.\ \lambda x^X \lambda y^X.\ x$ et $false = \Lambda X.\ \lambda x^X \lambda y^X.\ y$
- $Int \equiv \Pi X. X \to (X \to X) \to X$ avec l'entier n représenté par $\bar{n} = \lambda X.\ \lambda x^X \lambda f^{X \to X} f(f(\cdots(f(x))))$ avec n occurrences de f.
- $BinTree \equiv \Pi X.(F \to X) \to (N \to (X \to (X \to X))) \to X$ — les arbres ont leur feuilles de types F et leurs nœuds interne de type N.

V.a. Ecrire le lambda terme correspondant à l'arbre $h(f(g(a,b),h(b,c)),a)$ où f,g,h sont des noms de nœuds internes, a,b,c des noms de feuilles.

V.b. En supposant l'existence d'une fonction de $\bar{\leq} : Int \to Int \to Bool$ telle que $(\bar{\leq}\bar{n})\bar{m} = true$ si et seulement si $n \leq m$ (donc si $n > m$ on a $(\bar{\leq}\bar{n})\bar{m} = false$), définir la fonction qui a un arbre binaire associe sa hauteur, celle-ci étant conventionnellement nulle pour une feuille (on précisera les types). On pourra commencer par définir la fonction $Max : Int \to Int \to Int$ en utilisant $\bar{\leq}$. On montera l'évaluation des fonctions proposé sur un petit exemple.

$Succ = \lambda n^{Int}.\Lambda Y.\lambda x^Y \lambda g^{Y \to Y} g(n\{Y\}x\ g)$
$Max = \lambda n^{Int}.\ \lambda m^{Int}.(\bar{\leq} nm)\{Int\}m\ n$
$Hauteur = \lambda t^{BinTree}.t\{Int\}(\lambda f^F.\bar{0})(\lambda s^N \lambda n^{Int} \lambda m^{Int}(Succ(Max\ m\ n)))$

V.c. *Difficile, si on a le temps.* Donner le lambda terme correspondant à $\bar{\leq}$.

Cette question est difficile, il faut écrire des fonctions intermédiaires, et c'est surtout le prédécesseur qui pose problème:
$0 = \Lambda X.\ \lambda x^{X}.\ \lambda f^{X \to X}.\ x^{X} : Int$
Le test à zéro $Z : \lambda n^{Int}.\ n\{Bool\}true^{Bool}(\lambda d^{Bool}.\ false^{Bool})$
Le prédécesseur est particulièrement compliqué, car il faut obtenir le prédécesseur de n en faisant n fois quelque chose, mais quoi?
On va itérer n fois sur le couple $(0,0)$ la fonction $\phi(a,b) = (Succa,a)$ et prendre la deuxième composante, c'est bien $n-1$.
Un couple d'entiers s'écrit
$\Lambda X \lambda z^{Int \to Int \to X}.\ ((zn)m) : \Pi X.\ Int \to (Int \to X) \to X = Int \times Int.$
Les projections s'écrivent
$\pi_1 = \lambda c^{Int \times Int}.\ c\{Int\}\lambda x^{Int}\lambda y^{Int}.\ x$
et $\pi_2 \lambda c^{Int \times Int}.\ c\{Int\}\lambda x^{Int}\lambda y^{Int}.\ y$

$$\phi = \lambda c^{Int \times Int}.\ \Lambda X \lambda z^{Int \to Int \to X}.\ (z(Succ(\pi_1 c))(\pi_1 c))$$

$$Pred = \lambda n.\ \pi_2(n\{Int \times Int\}(\Lambda X \lambda z^{Int \to Int \to X}.\ ((z0)0))\phi)$$

Ensuite on dit que $n \inf m$ si m applications de $Pred$ à n donne 0:
$\lesseqqgtr = \lambda m^{Int}\lambda n^{Int}.\ Z(m\{Int\}nPred)$