MASTER INFORMATIQUE 2e ANNÉE
UE INF 559: LOGIQUE ET LANGAGES (RESPONSABLE B. COURCELLE)
DEVOIR À RENDRE LE 5 JANVIER 2011
⋆ ⋆ ⋆
PARTIE *Théorie de la démonstration et grammaires catégorielles* (CH. RETORÉ)

Exercice I *(Logique en lambda calcul)*

Etant données des constantes typées, et des variables en nombre dénombrable pour chaque type, on définit les lambda termes typés avec constantes comme le plus petit ensemble de termes clos par les opérations suivantes:

- Toute variable de type T est un lambda terme de type T.
- Toute constante de type T est un lambda terme de type T.
- Si u est un lambda terme de type U et v un lambda terme de type $U \rightarrow V$ alors $(v\ u)$ est un lambda terme de type V.
- Si x est une variable (pas une constante!) de type X et u un lambda terme de type U alors $\lambda x\ u$ est un lambda terme de type $X \rightarrow U$.

On rappelle que la forme générale d'un lambda terme simplement typé normal avec constantes est[1]

$$\lambda x_1^{X_1} \dots \lambda x_p^{X_p}\ (((h\ u_1)\dots)u_n)$$

- où h est une variable ou une constante de type $U_1 \rightarrow (U_2 \rightarrow (\rightarrow \dots (U_n \rightarrow U)))$
- et où chaque u_i est en lambda terme *normal* de type U_i.

On considère les lambda termes simplement typés sur les types atomiques $\mathbf{e}$ et $\mathbf{t}$ avec les constantes suivantes:

- les constantes logiques usuelles
  - $\Rightarrow, \wedge, \vee$ de type $\mathbf{t} \rightarrow (\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t})$
  - $\neg$ de type $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}$
  - $\forall, \exists$ de type $(\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{t}) \rightarrow \mathbf{t}$
- et les constantes suivantes:
  - P et Q de type $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{t}$
  - R et S de type $\mathbf{e} \rightarrow (\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{t})$
  - T et U de type $\mathbf{e} \rightarrow (\mathbf{e} \rightarrow (\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{t}))$

Montrer que tout lambda terme normal de type t avec pour seules variables libres des x_i pour $0 \geq i \geq n$, toutes de types e, correspond à une formule de la logique du premier ordre sur un langage que l'on précisera, formule dont les variables libres sont les x_i pour $0 \geq i \geq n$.

Exercice II *(Calcul de représentation sémantique dans les grammaires de Lambek)*

Donner un petit lexique catégoriel, syntaxique et sémantique, permettant d'analyser syntaxiquement et sémantiquement une ou deux phrases comportant des relatives. Par exemple l'analyse de "Certains étudiants qui travaillent réussissent." donnerait $\exists x\ etudiant(x) \wedge travaille(x) \wedge reussit(x)$. Faites au plus simple pour les noms (singuliers ou pluriels) et les déterminants (pluriel ou singulier, défini ou indéfini). Cet énoncé vous laisse volontairement beaucoup de liberté afin que votre lexique et votre modélisation soient différentes les unes des autres.

1. On peut se persuader de cette propriété à partir de la propriété de la sous formule et de l'existence de branche principale, vues en cours pour le calcul de Lambek et traitée dans *Proofs and types* pour la logique intuitionniste.