TD13 – Une vie moins ordinale

Exercice 1. *Où l'on parle d'ordinaux*

Définition 1. *Soient R une relation binaire et a un ensemble.*
L'ensemble a est dit (strictement) bien ordonné *par R si R est une relation d'ordre (strict) sur a et tout sous-ensemble non vide de a possède un plus petit élément pour R.*
La relation R est dite de bon ordre (strict) *si R est une relation d'ordre (strict) et pour tout x du domaine de R, la collection $R(., x)$ est un ensemble (strictement) bien ordonné par R.*

1. Montrer qu'un ensemble (strictement) bien ordonné est totalement (strictement) ordonné.

Définition 2 (Ordinaux). *On dit qu'un ensemble α est un* ordinal *si :*
– *$\in$ est une relation de bon ordre strict sur α ;*
– *$\forall x(x \in \alpha \Rightarrow x \subseteq \alpha)$.*

On désigne par $\mathfrak{O}$ la collection des ordinaux.

2. Montrer que $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ et $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ sont des ordinaux.

3. Montrer que les segments initiaux stricts d'un ordinal sont ses éléments. (On appelle *segment initial* de a pour l'ordre $\prec$ tout ensemble de la forme $\{x \in a / x \prec e\}$ où $e \in a$.)

4. Montrer que les éléments d'un ordinal sont des ordinaux.

5. Montrer qu'un ordinal n'est pas élément de lui-même.

6. Soient α et β deux ordinaux. Montrer que l'une et l'une seulement des trois propositions suivantes est vraie : $\alpha = \beta$, $\beta \in \alpha$, $\alpha \in \beta$.

7. Montrer que $\in$ est un bon ordre strict sur $\mathfrak{O}$.

Dorénavant, on notera $<$ la relation $\in$ sur les ordinaux, et $\leqslant$ la relation $\in \vee =$. Dans la suite, les termes (*strictement*) *supérieur* et *inférieur* font référence à $\leqslant$ (à $<$).

8. Montrer que sur les relations $\leqslant$ et $\subseteq$ sont logiquement équivalentes sur les ordinaux.

9. Montrer que la collection $\mathfrak{O}$ des ordinaux n'est pas un ensemble.

10. Soit α un ordinal. Montrer que le plus petit ordinal supérieur à α est $\alpha \cup \{\alpha\}$, noté $\alpha + 1$.

11. Montrer que tout ensemble d'ordinaux admet une borne supérieure dans $\mathfrak{O}$, et définir explicitement cette dernière.

Exercice 2. *Ordinaux et ensembles bien ordonnés*

1. Soient α et β deux ordinaux et $f : \alpha \to \beta$ une application strictement croissante. Montrer que $\alpha \leqslant \beta$ et $\xi \leqslant f(\xi)$ pour tout $\xi \in \alpha$.

2. Soient α et β deux ordinaux et $f : \alpha \to \beta$ un isomorphisme d'ensembles ordonnés de $(\alpha, \leqslant)$ sur $(\beta, \leqslant)$. Montrer que $\alpha = \beta$ et que f est l'application identique.

3. Soit $(u, \prec)$ un ensemble strictement bien ordonné. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme de u sur un ordinal.