TD09 – Automates appeal et grand-mères algébriques

Exercice 1. *Équivalence des grammaires algébriques et des automates à pile*

On se propose ici de montrer le théorème suivant :

Théorème 1. *Un langage L est algébrique si et seulement si il est reconnu par un PDA par pile vide.*

On considère un langage algébrique ne contenant pas ε. Soit G une grammaire sous forme normale de Greibach produisant L.

1. Montrer qu'il existe un PDA $\mathcal{A}$ à un état qui reconnaît les mots de L (on pourra construire $\mathcal{A}$ de telle sorte qu'il simule une dérivation la plus à gauche d'un mot de L).

Réciproquement, on se donne un PDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ reconnaissant le langage L (par pile vide). On cherche alors à construire une grammaire dont les constantes sont les symboles de Σ et les variables sont des éléments de

$$\{S\} \cup \{[q, Z, p] \mid (q, p) \in Q^2\ ,\ Z \in \Gamma\}$$

telle que $\forall x \in \Sigma^*, \forall (q, p) \in Q^2, \forall Z \in \Gamma$,

$$([q, Z, p] \to^* x) \Leftrightarrow (\langle q, x, Z\rangle \to^* \langle p, \varepsilon, \varepsilon\rangle)$$

2. Expliquer comment construire une telle grammaire. Montrer que la propriété recherchée est bien satisfaite.

3. Compléter la grammaire précédente pour qu'elle engendre tous les mots de L à partir du symbole S. Conclure.

Exercice 2. *Forme normale de Greibach*

Une *A-production* est une production ayant A comme partie gauche.
Soit $G = (V, T, P, S)$ une grammaire algébrique, $A \longrightarrow \alpha_1 B \alpha_2$ une production de P et $B \longrightarrow \beta_1|\beta_2|\dots|\beta_r$ l'ensemble des B-productions de P.
Soit $G_1 = (V, T, P_1, S)$ la grammaire obtenue à partir de G en supprimant la production $A \longrightarrow \alpha_1 B \alpha_2$ et en ajoutant les productions $A \longrightarrow \alpha_1\beta_1\alpha_2|\alpha_1\beta_2\alpha_2|\dots|\alpha_1\beta_r\alpha_2$.

1. Montrer que $L(G_1) = L(G)$.

Soit $G = (V, T, P, S)$ une grammaire algébrique. Soit $A \longrightarrow A\alpha_1|A\alpha_2|\dots|A\alpha_r$, l'ensemble des A-productions ayant la variable A comme lettre la plus à gauche dans la partie droite de la production. Soit $A \longrightarrow \beta_1|\beta_2|\dots|\beta_s$ l'ensemble des autres A-productions. Soit $G_1 = (V \cup \{B\}, T, P_1, S)$ la grammaire obtenue en ajoutant le nouveau symbole de variable B et en remplaçant toutes les A-productions par

- $A \longrightarrow \beta_i|\beta_i B \quad 1 \leq i \leq s$;
- $B \longrightarrow \alpha_i|\alpha_i B \quad 1 \leq i \leq r$.

2. Montrer que $L(G_1) = L(G)$.

3. Montrer que tout langage algébrique L ne contenant pas ε peut être engendré par une grammaire où toutes les productions sont de la forme $A \longrightarrow a\alpha$ avec $a \in T$ et $\alpha \in V^*$.