
TD05 – The Very Best of the Partiel 2004

Exercice 1.

Prédiction des mots univers

Dans tout cet exercice, on considèrera l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Définition 1 (automate de prédiction). Un automate de prédiction \mathcal{A} (sur l'alphabet Σ) est un quintuplet $(Q, q_0, Q_a, Q_b, \delta)$ où

- Q est un ensemble fini (les états de \mathcal{A})
- $q_0 \in Q$ est l'état initial
- $Q_a \subseteq Q$
- $Q_b \subseteq Q$
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ est la fonction de transition de \mathcal{A}

(on peut voir ces automates comme des automates finis déterministes ayant deux ensembles d'états terminaux)

Définition 2 (mots infinis). Un mot infini w sur Σ est une suite $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans Σ .

Définition 3 (parcours d'un mot). Soit \mathcal{A} un automate de prédiction et w un mot infini sur Σ . Le parcours de w sur \mathcal{A} est défini comme étant la suite $(q(w)_i)_{i \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans Q avec

$$q(w)_0 = q_0$$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad q(w)_{n+1} = \delta(q(w)_n, w_n)$$

Définition 4 (prédiction). Soit w un mot infini sur Σ et \mathcal{A} un automate de prédiction. On dira que l'automate \mathcal{A} prédit le mot infini w si le parcours de w sur \mathcal{A} passe un nombre infini de fois par des états de $Q_a \cup Q_b$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$q(w)_n \in Q_a \Rightarrow w_n = a \quad \text{et}$$

$$q(w)_n \in Q_b \Rightarrow w_n = b$$

De plus, un mot infini sur Σ est dit *prédictible* s'il existe un automate de prédiction \mathcal{A} qui prédise w .

Intuitivement, la prédiction d'un mot w par l'automate \mathcal{A} signifie que lorsque l'on atteint un état de Q_a (en lisant un préfixe de w) la prochaine lettre de w que l'on va lire sera un a (et symétriquement pour b).

Définition 5 (mots univers). Un mot infini w sur Σ est dit *univers* si tout mot fini x de Σ^* est un facteur de w .

On se propose de montrer le résultat suivant

Proposition 1. Un mot infini w est prédictible si et seulement si il n'est pas univers.

1. Montrer que dans un mot univers w , tout mot fini $x \in \Sigma^*$ apparaît un nombre infini de fois comme facteur de w et que tous ses suffixes (les suites $(w_i)_{i \geq k}$) sont également univers.
2. Montrer que tout mot infini qui n'est pas univers est prédictible (on pourra considérer un plus court mot de Σ^* qui n'apparaît qu'un nombre fini de fois dans w).

On suppose maintenant que l'on a un mot w qui est prédit par un automate \mathcal{A} . On veut montrer que w n'est pas univers.

3. Montrer que l'on peut se ramener (quitte à considérer un suffixe de w et un sous-automate de \mathcal{A}) à une situation où le parcours de w sur \mathcal{A} passe une infinité de fois par tous les états de \mathcal{A} .

On suppose que l'on est dans la situation décrite dans la question précédente.

4. Montrer qu'il existe un entier d tel que pour tout état q de \mathcal{A} , il existe un mot $x_q \in \Sigma^*$ de longueur d qui n'est jamais lu dans le parcours de w sur \mathcal{A} à partir de q .

C'est-à-dire que pour tout i , si $q(w)_i = q$ alors le mot $w_i w_{i+1} \dots w_{i+d-1}$ est différent de x_q .

5. En déduire qu'il existe un entier K tel que pour tout $n \geq 1$, le nombre de facteurs distincts de longueur nd dans w est inférieur à $K(2^d - 1)^n$.

6. Conclure.

Exercice 2.

L'abominable Lex L. (contre Superman)

Soit L un langage rationnel sur un alphabet fini Σ quelconque. On munit Σ d'un ordre total et l'on considère l'ordre lexicographique \leq_{lex} sur Σ^* . On définit le langage

$$L_{\text{lex}} = \{w \in L \mid \forall x \in L, |x| = |w| \Rightarrow w \leq_{\text{lex}} x\}$$

(Pour chaque longueur de mots dans L , on ne garde que le plus petit pour l'ordre lexicographique.) Montrer que L_{lex} est rationnel.