

---

**TD01 - Aux grands mots les grands moyens**


---

**Exercice 1.***Échauffement*

1. Trouver un automate fini reconnaissant les entiers écrits en base 2 qui sont congrus à 1 modulo 3.
2. Donner un automate fini qui reconnaisse l'ensemble des mots sur  $\{a, b\}$  dont la  $i^{\text{ième}}$  lettre en partant de la fin est un  $a$ .

**Exercice 2.***Rationnel ?*

✂ Parmi les langages suivants lesquels sont rationnels ? Justifiez vos réponses :

1.  $\{a^{2n}, n \geq 0\}$ .
2.  $\{a^m b^n a^{m+n}, m \geq 0 \text{ et } n \geq 0\}$ .
3.  $\{a^p, p \text{ premier}\}$ .
4. L'ensemble des mots qui n'ont pas trois  $a$  consécutifs.
5. L'ensemble des mots qui ont un nombre égal de  $a$  et de  $b$ .
6. L'ensemble des mots qui sont des palindromes sur  $\Sigma = \{a, b\}$ .
7.  $\{u\bar{u}v \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$  où  $\bar{u}$  est le miroir de  $u$ ,  $\overline{abb} = bba$ .
8.  $\{uv\bar{u} \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$ .
9.  $\{a^i b^j, \text{pgcd}(i, j) = 1\}$ .
10.  $\{a^i b^j, i \geq j\}$ .

**Exercice 3.***La puissance du commutateur*

✂ Montrer que si deux mots  $u$  et  $v$  commutent ( $uv = vu$ ) ils sont puissance d'un même mot (il existe  $w \in \Sigma^*$  et  $k, k' \in \mathbb{N}$  tels que  $u = w^k$  et  $v = w^{k'}$ ).

**Exercice 4.***Elu par cette crapule, Esope reste et se repose.*

On appelle image miroir d'un mot  $u$  sur un alphabet  $\Sigma$  (ou simplement miroir de  $u$ ) le mot  $\bar{u}$  ainsi défini :

- si  $u = \epsilon$  alors  $\bar{u} = \epsilon$ ,
- si  $u = a_1 a_2 \dots a_n$  alors  $\bar{u} = a_n a_{n-1} \dots a_1$ .

Soit  $L$  l'ensemble des mots  $u$  sur  $\Sigma$  tels que  $u = \bar{u}$  (appelés *palindromes*). On suppose que  $\Sigma$  contient au moins deux lettres (parce que sinon c'est pas très drôle).

1. Soient  $u, u_1, u_2, \dots, u_n$  des mots sur  $\Sigma$  tels que  $u$  soit distinct de tous les  $u_i$ . Démontrer qu'il existe un mot  $v$  sur  $\Sigma$  tel que  $uv \in L$  et  $u_i v \notin L$  pour tout  $i$ . (On pourra considérer  $v = a^m b a^m \bar{u}$  où  $a$  et  $b$  sont des lettres de  $\Sigma$  et  $m$  est un entier assez grand)
2. Existe-t-il toujours un tel mot  $v$  si la famille  $(u_i)$  est infinie ?

**Exercice 5.**

*Babord et tribord sont dans un bateau...*

On appelle bord d'un mot  $u$  sur un alphabet  $\Sigma$  tout mot  $v$  non vide qui est à la fois préfixe propre et suffixe propre de  $u$ .

- ✎ Prouver que si  $\Sigma$  est un alphabet contenant au moins deux lettres, pour tout mot  $u$  non vide sur  $\Sigma$ , il existe un mot  $v$  sur  $\Sigma$  tel que  $uv$  n'a pas de bord.