**TD10. Kolmogorov II**
**Il est de retour, et il est pas content**

On rappelle que la fonction $K : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ désigne la fonction de complexité de Kolmogorov (donc $K(x)$ correspond *grossièrement* à la longueur du plus court putain de programme de sa race qui calcule x... et moins grossièrement ben, c'est pareil sans les injures).
De plus, on définit la complexité de Kolmogorov de $x$ sachant $y$ (complexité conditionelle) par

$$K(x|y) = \min\{|p| \mid U\langle p, y\rangle = x\}$$

(où $U$ est l'algorithme de décompression utilisé dans la définition de $K$) et la complexité d'une suite $(u_i)$ (finie ou infinie) par

$$K(u) = \min\{|p| \mid \forall i, U\langle p, i\rangle = u_i\}$$

Etant donnée une suite $u = (u_i)$ (finie ou infinie), on notera $u_{1:n}$ la suite des $n$ premiers termes de $u$.

**Exercice 1** *Un survivant du TD9*

On donne, pour chaque $n$, un ensemble de mots $V_n$ de taille au plus $2^n$ et l'on suppose que l'ensemble $\{\langle x, n\rangle \mid x \in V_n\}$ est récursivement énumérable.

Montrer que les éléments de $V_n$ ont une complexité au plus $n + O(1)$.

**Exercice 2** *Keep it simple !*

Montrer que l'ensemble $B = \{x \mid K(x) \leq \log(x)\}$ est simple (RE, de complémentaire infini et qui rencontre tout ensemble RE infini).

**Exercice 3** *Recursively Evil*

1. Montrer que la suite caractéristique $\chi$ d'un ensemble RE, $A$[1], vérifie

$$\exists c_A \forall n, \quad K(\chi_{1:n}) \leq 2\log n + c_A$$

2. Montrer qu'il existe un ensemble RE, C[2], dont la suite caractéristique $\chi$ vérifie

$$\forall n, \quad K(\chi_{1:n}) \geq \log n$$

3. Montrer que pour tout $m$, il existe un mot $x$ tel que pour presque tout $y$ (tous sauf un nombre fini) on ait

$$K(x) - K(x|y) \geq m$$

(informellement, cela signifie que presque tous les mots contiennent beaucoup (plus que $m$) d'information sur $x$)

**Exercice 4** *Celui-là aussi je le remets parce qu'il est trop beau*

Soit $T$ une théorie cohérente permettant de modéliser le fonctionnement des machines de Turing. On suppose que $T$ est récursivement énumérable.

[1] pocalypse... hahaha... hum...
[2] ode Veronica... bon j'arrête

Montrer qu'il existe un entier $c_T$ tel que tous les théorèmes de $T$ de la forme "$K(x) \geq n$" vérifient $n \leq c_T$.

**Exercice 5** *Gödel vu par Smullyan*

On considère l'arithmétique de Peano, notée PA, qui est une théorie d'un langage $\mathcal{L}$.
On dit qu'un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ est *exprimable* s'il existe un prédicat arithmétique $H(n)$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ H(\bar{n}) \iff n \in A$$

On parlera également, par une généralisation évidente, de prédicats ou de fonctions $n$-aires *exprimables*.
On se donne une fonction bijective $g$, de l'ensemble des mots (qu'ils soient des formules bien formées ou non) de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{N}$ ; $g(\psi)$ est appelé le *numéro de Gödel* de $\psi$. On note $\psi_n$ la formule vérifiant $g(\psi_n) = n$. On définit une fonction injective $d$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, qui à $n$ associe le numéro de Gödel de $\psi_n(\bar{n})$, si $\psi_n$ est une formule à une variable libre.
Pour $A$ une partie de $\mathbb{N}$, on note $\tilde{A}$ son complémentaire et $A^*$ l'image directe de $A$ par $d$.

**1.** Montrer que si $A$ est exprimable, alors $\tilde{A}$ l'est aussi.

**2.** Montrer que les fonctions récursives sont exprimables.

**3.** Montrer que l'on peut choisir $g$ (et $d$) de telle manière que, si $A$ est exprimable, $A^*$ le soit aussi.

**4.** Montrer que l'ensemble des numéros de Gödel des énoncés prouvables de PA est exprimable.

**5.** En déduire que PA est une théorie incomplète.