**TD7. Pour qui sonne le glas quand la mariée est en noir ?**
**(ou pourquoi il ne faut point rester fixe quand on jette du riz à l'église)**

**Exercice 1** *Fonctions calculables ?*

**1.** Montrer qu'il n'existe pas de fonction récursive $f$ telle que :

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_x(x) \text{ est défini,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_x \text{ est totale,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**2.** Montrer qu'il existe une fonction partielle calculable $\psi$ qui ne peut pas être étendue à une fonction récursive totale.

**3.** Soient $f$ une fonction récursive totale et $g$ une fonction récursive totale injective d'image récursive. Montrer que si $\forall x \in \mathbb{N}, g(x) \leq f(x)$ alors l'image de $f$ est récursive.

**Exercice 2** *Récursénumérabilitexpialidocious*

**1.** Montrer qu'une fonction est récursive si et seulement si son graphe est récursivement énumérable.

**2.** Montrer que tout ensemble récursivement énumérable infini contient un sous-ensemble infini récursif.

**3.** Montrer qu'il existe une infinité dénombrable d'ensembles récursivement énumérables non récursifs.

**4.** Soit $\mathcal{RE}$ l'ensemble des ensembles récursivement énumérables, $A \in \mathcal{RE}$ infini. Montrer que $\{A \cap B / B \in \mathcal{RE}\}$ est isomorphe, pour l'ordre défini par l'inclusion, à $\mathcal{RE}$.

**Exercice 3** *Un nain c'est pas rable*

On dit que deux parties disjointes $A$ et $B$ de $\mathbb{N}$ sont inséparables s'il n'existe pas d'ensemble récursif $R$ contenant l'un mais d'intersection nulle avec l'autre.

**1.** Soit $A$ une partie de $\mathbb{N}$, on suppose que $A$ et son complémentaire sont récursivement inséparables. Que peut-on en déduire ? La réciproque est-elle vraie ?

**2.** Montrer qu'il existe deux ensembles récursivement énumérables inséparables.

**Exercice 4** *Problème de correspondance de Post*

On se donne un alphabet fini $\Sigma$ et un ensemble fini $P$ de paires de mots sur $\Sigma$. On veut savoir s'il existe une suite finie (non vide) $(v_i, w_i)$ d'éléments de $P$ telle que le mot formé par concaténation des $v_i$ soit égal au mot formé par concaténation des $w_i$.
Ce problème se transforme en *problème de correspondance de Post modifié* (**PCPM**) lorsque le premier terme de la suite est fixé a priori.

**1.** Résoudre **PCP** pour les instances suivantes :
- $P = \{(abb, ab), (bab, ba), (aab, abab)\}$
- $P = \{(a, ab), (ba, aba), (b, aba), (bba, b)\}$

- $P = \{(ab, bb), (aa, ba), (ab, abb), (bb, bab)\}$

**2.** Montrer que si $\Sigma$ ne contient qu'une lettre, le problème est décidable. Et si $\Sigma$ contient exactement deux lettres ? Trois ?

**3.** Montrer que **PCPM** et **PCP** sont équivalents.

**4.** Peut-on se passer des couples de la forme $(w, w)$ ?

**5.** Montrer que **PCP** est indécidable. Pour ce faire on pourra associer à une machine de Turing $M$ et un mot $w$ une instance du problème de Post, simulant le fonctionnement de $M$ sur l'entrée $w$, de telle manière que le problème de Post admette une solution si et seulement si le calcul de $M$ sur l'entrée $w$ s'arrête.