TD6. Plus on est de fous, moins y a de riz.

Exercice 1 *Rice*

1. Montrer qu'il n'existe pas de machine de Turing qui décide si
   1. une machine de Turing ne s'arrête jamais ;
   2. le domaine de la fonction calculée par une machine de Turing est infini ;
   3. deux machines de Turing calculent la même fonction.

2. Soit A un sous-ensemble non trivial des fonctions récursives unaires. Montrer que l'ensemble des numéros de Gödel des machines de Turing calculant des fonctions de A n'est pas récursif.

Exercice 2 *Fonctions calculables ?*

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction récursive f telle que :
   1. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_x(x) \text{ est défini,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
   2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_x \text{ est totale,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2. Montrer qu'il existe une fonction partielle calculable ψ qui ne peut pas être étendue à une fonction récursive totale.

3. Soient f une fonction récursive totale et g une fonction récursive totale injective d'image récursive. Montrer que si $\forall x \in \mathbb{N}, g(x) \leq f(x)$ alors l'image de f est récursive.

Exercice 3 *Ubik*

Montrer qu'une machine résolvant le problème de l'arrêt permettrait de résoudre la conjecture de Goldbach, mais pas forcément la question du sens de la vie.

Exercice 4 *Vous suivez dans le fond ?*

Soit P un polynôme à coefficients naturels. Montrer qu'il existe un entier n tel que le domaine de φ_n soit $\{P(n)\}$.

Exercice 5 *Récursénuméritibilité*

1. Montrer qu'une fonction est récursive si et seulement si son graphe est récursivement énumérable.

2. Montrer que tout ensemble récursivement énumérable infini contient un sous-ensemble infini récursif.

3. Montrer qu'il existe une infinité dénombrable d'ensemble récursivement énumérable non récursifs.

4. Soit $\mathcal{RE}$ l'ensemble des ensembles récursivement énumérables, $A \in \mathcal{RE}$. Montrer que $\{A \cap B / B \in \mathcal{RE}\}$ est isomorphe, pour l'ordre défini par l'inclusion, à $\mathcal{RE}$.