TD2. Machines à compteurs

Exercice 1

Extension du cours d'automates

1. Montrer que les langages algébriques sont récursifs.

2. Montrer que les automates déterministes à 2 piles (extension naturelle de la définition d'automates à pile) sont équivalents aux machines de Turing.

Exercice 2

Les machines à compteurs

Une machine à compteurs est un quituplet (Q, q_0, Q_f, n, δ) où
- Q est un ensemble fini d'états
- $q_0 \in Q$ est l'état initial
- $Q_f \subseteq Q$ est l'ensemble des états finals
- $n \in \mathbb{N}$ est le nombre de compteurs de la machine
- $\delta : Q \times \{0,1\}^n \to Q \times \{-1,0,1\}^n$ est la fonction de transition de la machine, telle que si $\delta(q, t_1, \dots, t_n) = (q', x_1, \dots, x_n)$ alors $\forall i \in [\![1, n]\!], t_i = 0 \Rightarrow x_i \neq -1$).

On définit la fonction de test $\Delta : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ qui à 0 associe 0 et à tout autre entier associe 1.

A tout moment, la configuration d'une machine à n compteurs peut être décrite par un $(n+1)$-uplet de $Q \times \mathbb{N}^n$ (le premier élément étant l'état de la machine, les suivants étant les valeurs de chacun des compteurs). Si au temps τ la machine est dans la configuration $(q, c_1, \dots, c_n)$, et que l'on a

$$\delta(q, \Delta(c_1), \dots, \Delta(c_n)) = (q', x_1, \dots, x_n)$$

alors au temps $\tau + 1$ la machine passe dans l'état

$$(q', c_1 + x_1, \dots, c_n + x_n)$$

On dira d'une machine à n compteurs qu'elle calcule la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si pour tout $x \in \mathbb{N}$, partant de la configuration $(q_0, x, 0, \dots, 0)$, la première configuration pour laquelle l'état est dans Q_f contient $f(x)$ sur le premier compteur (la fonction n'est pas définie pour les valeurs de x sur lesquelles la machine n'atteint jamais d'état final).

1. Montrer que les fonctions $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto 2x + 1$ sont calculables par des machines à deux compteurs.

2. Montrer qu'il est possible de calculer la fonction $x \mapsto x \bmod 2$ sans détruire l'entrée (on veut que l'entier x donné en entrée soit contenu dans le second compteur à la fin du calcul).

3. En utilisant une méthode similaire à la simulation d'une machine de Turing par un automate à deux piles vue précédement, montrer comment on peut simuler une machine de Turing d'alphabet $\{1, B\}$ à l'aide d'une machine à trois compteurs (on utilisera deux compteurs pour coder le ruban, et un compteur pour les calculs).

4. En utilisant un codage "astucieux", expliquer comment on peut simuler le fonctionnement d'une machine à n compteurs à l'aide d'une machine à 2 compteurs (on codera les n compteurs sur un seul, et l'on utilisera le second pour les calculs).

5. En déduire que la classe des fonctions calculées par les machines à deux compteurs est exactement la classe des fonctions récursives.

Exercice 3 *Encore des langages...*

1. Montrer qu'il existe des langages non récursifs. Décrivez-en un. Même question avec les langages non récursivement énumérables.

2. Quels sont les langages reconnus par les machines de Turing qui ne peuvent pas écrire sur leur ruban ?

3. Quelle est la classe de langages qui est engendrée par les grammaires contextuelles ?