Partiel (2 heures)

Documents et thèse de Church-Turing autorisés.

Cet énoncé est trop long.

Exercice 1. *Récursivité*

1. Les ensembles suivants sont-ils récursifs ? récursifs primitifs ? récursivement énumérables ? de complémentaire récursivement énumérable ? Justifier.

1. $\{i \mid \varphi_i(0) = 2\varphi_i(1)\}$
2. $\{i \mid \varphi_i(i) = 2\varphi_i(i+1)\}$
3. $\{\langle i, j\rangle \mid \varphi_i \neq \varphi_j\}$
4. $\{x \in \mathbb{N}, \varphi_{1664}(51) = x\}$
5. $\{x \in \mathbb{N}, \varphi_{1664}(x) = 51\}$

2. Existe-t-il un entier m tel que $\mathrm{dom}(\varphi_m) = \{1337^m\}$?

3. Un ensemble est dit *simple* s'il est récursivement énumérable, de complémentaire infini et qu'il rencontre tout ensemble récursivement énumérable infini. Construire un ensemble simple. [Bonus] En construire un autre de manière complètement différente.

4. Montrer que

a. si h est une fonction récursive totale, il existe une fonction récursive totale strictement croissante k telle que $\forall i,\ \varphi_{h(i)} = \varphi_{k(i)}$;

b. il existe une fonction récursive totale f telle que $\{i \mid \varphi_i = \varphi_{f(i)}\}$ n'est pas récursif ;

c. tout ensemble récursivement énumérable infini contient un ensemble récursivement énumérable non récursif et un ensemble infini récursif.

Exercice 2. *Un autre problème de la raie (le poisson qui a des gros sushis)*

Soit $\mathcal{F} = \{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un ensemble dénombrable de fonctions partielles de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On suppose que

– la fonction définie par $\mathrm{dom}(f) = \{0\}$ et $f(0) = 0$ est dans $\mathcal{F}$;

– pour tous entiers i et j, il existe un entier e tel que $\psi_e = \psi_i \circ \psi_j$.

1. Montrer que la fonction caractéristique de $\{x \mid \psi_x(x) \text{ est définie}\}$ n'est pas dans $\mathcal{F}$.

Exercice 3. *Des points fixes, des points fixes, toujours des points fixes*

1. Soit g une fonction récursive totale. Montrer que pour tout entier z il existe un entier n tel que $\varphi_{g\langle n,z\rangle} = \varphi_n$.

2. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale η telle que

$$\forall x, z \quad \varphi_{\varphi_x\langle \eta\langle x,z\rangle, z\rangle} = \varphi_{\eta\langle x,z\rangle}$$

3. En déduire que tout programme se comporte de façon universelle sur une infinité d'autres programmes... Plus formellement,

$$\forall a \in \mathbb{N},\ \exists I_a \subseteq \mathbb{N} \text{ infini}, \forall x \in I_a, \forall y \in \mathbb{N}, \varphi_a \langle x, y\rangle = \varphi_x(y)$$

Exercice 4. *Identification inductive*

Si f est une fonction totale de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ on note $\alpha_f(n) = \langle f(0), f(1), \ldots, f(n)\rangle$. On dit qu'une machine de Turing M *identifie inductivement* une fonction totale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si :
- $\forall n \in \mathbb{N}\ M(\alpha_f(n))$ est défini, et
- $\exists a\,(\varphi_a = f \wedge \exists p \in \mathbb{N}\,\forall n > p\ M(\alpha_f(n)) = a)$.

On dit qu'une classe de fonctions $\mathcal{F}$ est *inductivement identifiable* s'il existe une machine de Turing M identifiant inductivement toutes les fonctions de $\mathcal{F}$.

1. Pourquoi parle-t-on d'*identification inductive* ?

2. L'ensemble des fonctions récursives primitives unaires est-il inductivement identifiable ?

3. Et l'ensemble des fonction récursives unaires totales, hein ?

Exercice 5. *Décidabilité à l'estonienne*

On notera comme d'habitude $\langle .,.\rangle$ une bijection fixée de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, et par récurrence on définit également $\langle x_1, \ldots, x_{n+1}\rangle = \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, x_{n+1}\rangle$.
Soit $\mathcal{F}$ une classe de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes :
- $\mathcal{F}$ contient les fonctions constantes et les projections π_1 et π_2 définies par $\pi_1(\langle x, y\rangle) = x$ et $\pi_2(\langle x, y\rangle) = y$,
- elle contient la fonction `if` définie par $\texttt{if}\,(\langle x, y, z, w\rangle) = \begin{cases} w & \text{si } x = y \\ z & \text{sinon} \end{cases}$ et
- elle est stable par composition et couplage $(\langle x, y\rangle \mapsto \langle f(x), g(y)\rangle)$.

Étant donné deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on note $f \leq_m g$ s'il existe $h \in \mathcal{F}$ tel que $f = g \circ h$.

1. Montrer que si $g \in \mathcal{F}$ et $f \leq_m g$, alors $f \in \mathcal{F}$.

On suppose maintenant qu'il existe une fonction récursive U telle que $\mathcal{F} = \{U(x, .)/x \in \mathbb{N}\}$ et des fonctions `const`, `comp` et `pair` dans $\mathcal{F}$ vérifiant :
- $\psi_{\texttt{const}(x)} = \tilde{x}$,
- $\psi_{\texttt{comp}(\langle x,y\rangle)} = \psi_x \circ \psi_y$ et
- $\psi_{\texttt{pair}(\langle x,y\rangle)} = \langle \psi_x, \psi_y\rangle$.

où l'on note $\psi_x = U(x, .)$.

2. L'ensemble des fonctions récursives primitives unaires forme-t-il un $\mathcal{F}$ convenable ? Et l'ensemble des fonctions récursives totales unaires ? Et l'ensemble des fonctions récursives unaires ?

On définit les fonctions :

- $\texttt{grU}(\langle x,y,z\rangle) = \begin{cases} 1 & \text{si } U(x,y) = z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $\texttt{diag}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } U(x,x) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $\texttt{member}_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } U(y,x) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3. Montrer que ces fonctions sont équivalentes pour $\leq_m$.

4. En déduire qu'aucune n'appartient à $\mathcal{F}$.

Une propriété P sur $\mathcal{F}$ est une fonction à valeurs dans $\{0;1\}$ telle que $\psi_x = \psi_y \Rightarrow P(x) = P(y)$.

5. Soit P une propriété non triviale[1] sur $\mathcal{F}$. Montrer que $\texttt{grU} \leq_m P$. En déduire que $P \notin \mathcal{F}$.

6. Montrer que pour toute fonction f de $\mathcal{F}$, il existe une infinité de x tels que $f = \psi_x$.

[1] C'est-à-dire qu'il existe x et y tels que $P(x) = 0$ et $P(y) = 1$.