TD1. Problème de correspondance de Post et autres questions marrantes

Exercice 1 *Problème de correspondance de Post*

On se donne un alphabet fini Σ et un ensemble fini P de paires de mots sur Σ. On veut savoir s'il existe une suite finie (non vide) (v_i, w_i) d'éléments de P telle que le mot formé par concaténation des v_i soit égal au mot formé par concaténation des w_i.
Ce problème se transforme en *problème de correspondance de Post modifié* (**PCPM**) lorsque le premier terme de la suite est fixé a priori.

1. Résoudre **PCP** pour les instances suivantes :
   - $P = \{(abb, ab), (bab, ba), (aab, abab)\}$
   - $P = \{(a, ab), (ba, aba), (b, aba), (bba, b)\}$
   - $P = \{(ab, bb), (aa, ba), (ab, abb), (bb, bab)\}$
2. Montrer que si Σ ne contient qu'une lettre, le problème est décidable. Montrer que par contre, avec 2 lettres, il est aussi difficile que le cas général.
3. Montrer que **PCPM** et **PCP** sont équivalents.
4. Peut-on se passer des couples de la forme (w, w) ?
5. Montrer que **PCPM** est indécidable. Pour ce faire on pourra associer à une machine de Turing M et un mot w une instance du problème de Post modifié simulant le fonctionnement de M sur l'entrée w de telle manière que le problème de Post admette une solution si et seulement si le calcul de M sur l'entrée w s'arrête.

Exercice 2 *Fonctions calculables ?*

1. En utilisant une méthode similaire à la preuve du théorème de Rice, montrer qu'il n'existe pas de fonction récursive f telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_x(x) \text{ est défini,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Montrer qu'il existe une fonction partielle calculable ψ qui ne peut pas être étendue à une fonction récursive totale.

Exercice 3 *Récursénumérabilitexpialidocious*

1. Montrer que tout ensemble récursivement énumérable infini contient un sous-ensemble infini récursif.
2. Montrer qu'il existe une infinité dénombrable d'ensembles récursivement énumérables non récursifs.