Partiel - Durée 2h

L'objectif du partiel est de se convaincre que vous avez compris le cours et savez l'utiliser. Il est inutile de réciter par coeur des blocs du cours (particulièrement les questions de l'exercice 1). Reformulez les choses clairement à votre manière.
Par la suite, ne vous noyez pas dans un formalisme abusif (servant parfois à cacher le fait que vous ne comprenez pas). Donner clairement une idée qui permet de convaincre le correcteur que vous avez bien compris est largement préférable (c'est à vous de distinguer ce qui doit être rigoureux et ce qui peut être informel).
Les questions sont souvent indépendantes, et vous pouvez admettre le résultat d'une question pour passer à la suite (précisez-le dans ce cas).

Exercice 1 *Echauffement*

1. Si $\mathcal{C}$ est une classe de complexité. Que signifie être $\mathcal{C}$-complet au sens de la réduction polynomiale ?

Un *littéral* est soit une variable x soit la négation d'une variable $\neg x$. On appellera *clause de taille* n une disjonction de n littéraux $l_1 \vee \ldots \vee l_n$ et *formule de taille* n une conjonction de n clauses $c_1 \wedge \ldots \wedge c_n$.

2. Donner une clause de taille 2 équivalente à l'expression $x \Rightarrow y$ où x et y sont des littéraux.

3. En déduire une formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de taille n équivalente à l'expression

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} x_i \Leftrightarrow x_j$$

4. En déduire une transformation τ de toute formule f en une formule $\tau(f)$ équivalente dans laquelle tout littéral apparaît au plus 2 fois et toute variable au plus 3 fois.

5. Rappeler la définition de la classe de complexité NP et du langage NP-complet 3-SAT.

6. Rappeler toutes les étapes nécessaires pour montrer qu'un problème A est NP-complet par réduction au problème B dont on sait qu'il est NP-complet.

7. Déduire que le langage 2-3-SAT, la restriction de 3-SAT aux formules dans lesquelles chaque littéral apparaît au plus 2 fois est NP-complet.

Exercice 2 *Définition du problème*

Nous allons nous intéresser ici à un jeu appelé *Phutball* inventé par John H. Conway. Il se joue sur un plateau $n \times n$ où n est un entier impair. On le représente par une grille sur les intersections de laquelle les joueurs posent des pions. Il existe deux types de pions : la balle, pion noir unique, et les pions blancs. Au début du jeu la grille ne contient que la balle, placée au milieu. Deux joueurs jouent à tour de rôle. Le but du joueur 1 est d'amener la balle sur la colonne la plus à gauche, ou encore plus à gauche de celle-ci, tandis que le joueur 2 essaie d'amener la balle sur ou au-delà de la colonne la plus à droite. A chaque tour, un joueur peut soit placer un pion blanc sur une intersection libre, soit déplacer la balle par un ou plusieurs sauts.
La balle peut sauter au dessus d'un segment horizontal ou vertical de pions situé juste à côté d'elle. Les pions sautés sont retirés du plateau. Le joueur peut décider d'enchaîner plusieurs sauts en un seul tour s'il le désire. Dans la position de la figure 1a le joueur peut

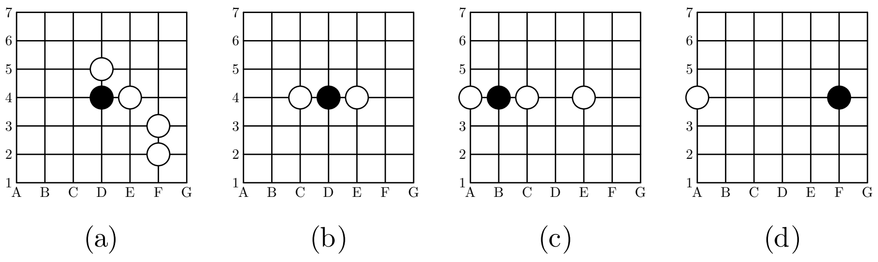

FIG. 1 – exemples de configurations du jeu

par exemple poser un joueur en B2, ou encore déplacer la balle de D4 en D6 et retirer le joueur en D5, ou bien déplacer la balle de D4 en F4 et retirer le joueur en E4 ou bien encore déplacer la balle de D4 en F4 puis de F4 en F1 et retirer les joueurs E4, F3 et F2).
On note le déroulement d'une partie en indiquant pour chaque tour de jeu la position à laquelle le nouveau joueur est posé ou bien les positions successives de la balle au cours des sauts.
Par exemple, on peut avoir le début de partie : 1. C4, 2. E4, 3. D4-B4, 4. C4, 5. A4, 6. B4-D4-F4. La figure 1b montre la position après le tour 2, la figure 1c après le tour 5 et la figure 1d après le tour 6.

1. Partant de la position illustrée par la figure 1d (c'est au joueur 1 de jouer), proposer une fin de partie (intelligente) en 6 coups dans laquelle le joueur 2 gagne (le joueur 2 essaie d'atteindre la colonne la plus à droite).

2. La taille du plateau $n \times n$ étant fixée, donner une borne du nombre maximum de choix possibles pour un joueur en un tour.

On s'intéresse au problème de décision suivant. Etant donnée une configuration du plateau (et la taille du plateau) il faut décider s'il est possible de gagner la partie en un coup.

3. Montrer que le problème est dans NP.

Exercice 3 *Gadgets : sélecteurs, croisements et fusibles*
La figure 2 représente les trois principaux types de gadgets utilisés par la suite. La balle est située sur l'une des croix.

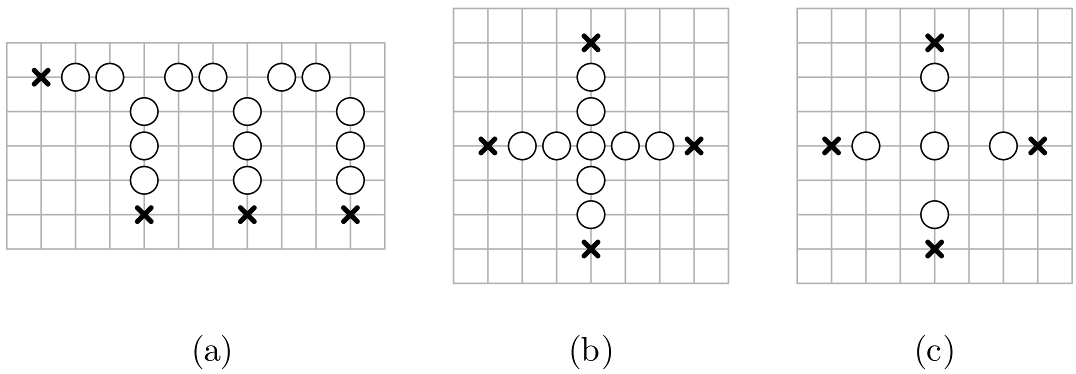

FIG. 2 – gadgets en tous genres

1. La figure 2a représente un *3-sélecteur vertical*. Expliquer (rapidement) le principe d'un sélecteur et toutes les manières pour la balle de le traverser par des sauts en partant d'une croix.

2. La figure 2b représente un *croisement*. Après un premier saut, expliquer si et comment la balle peut à nouveau le traverser en partant d'une croix.

3. Mêmes questions avec le *fusible* représenté sur la figure 2c.

Exercice 4 *Preuve de NP-complétude*

On va procéder par réduction à 3-SAT. Les formules de 3-SAT sont codées de la façon suivante. Soit f une formule à m variables $v_1, \dots, v_m$ et n clauses $c_1, \dots, c_n$.
A chaque variable v_i on associe deux lignes du plateau (celle du haut associée à v_i et celle du bas à $\neg v_i$). A chaque extrémité se trouve un 2-sélecteur horizontal. A chaque clause c_j on associe trois colonnes du plateau, une par littéral de la clause. A chaque extrémité se trouve un 3-sélecteur vertical.
Si le k-ème littéral de la clause c_j est la variable v_i (resp. $\neg v_i$) alors on place un croisement à l'intersection de la colonne du littéral et de la ligne de v_i (resp. $\neg v_i$). et un fusible à l'intersection de la colonne du littéral et de la ligne de $\neg v_i$ (resp. v_i). On place des croisements à toutes les intersections inoccupées.
La figure 3 représente le codage de la formule $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$ (on a un peu compressé les croisements et les fusibles, mais l'idée y est et c'était encore moins lisible sinon).

1. Expliquer comment compléter la construction (de telle sorte que ça marche dans le cas général) pour que la configuration du plateau obtenue permette de gagner en un coup si la formule de départ est dans 3-SAT. Pour cela, indiquez où l'on doit placer le ballon et où il faut rajoutter des pions blancs (qui serviront de connexions) pour que le joueur 1 ait un coup gagnant (en plusieurs sauts) si et seulement si la formule est vraie.

Compléter la construction sur la figure (dans ce cas, ne pas oublier de rendre la figure).

2. Montrer que si on peut gagner en un coup alors la formule correspondante est dans 3-SAT.

3. Terminer la preuve de NP-complétude du problème étudié.

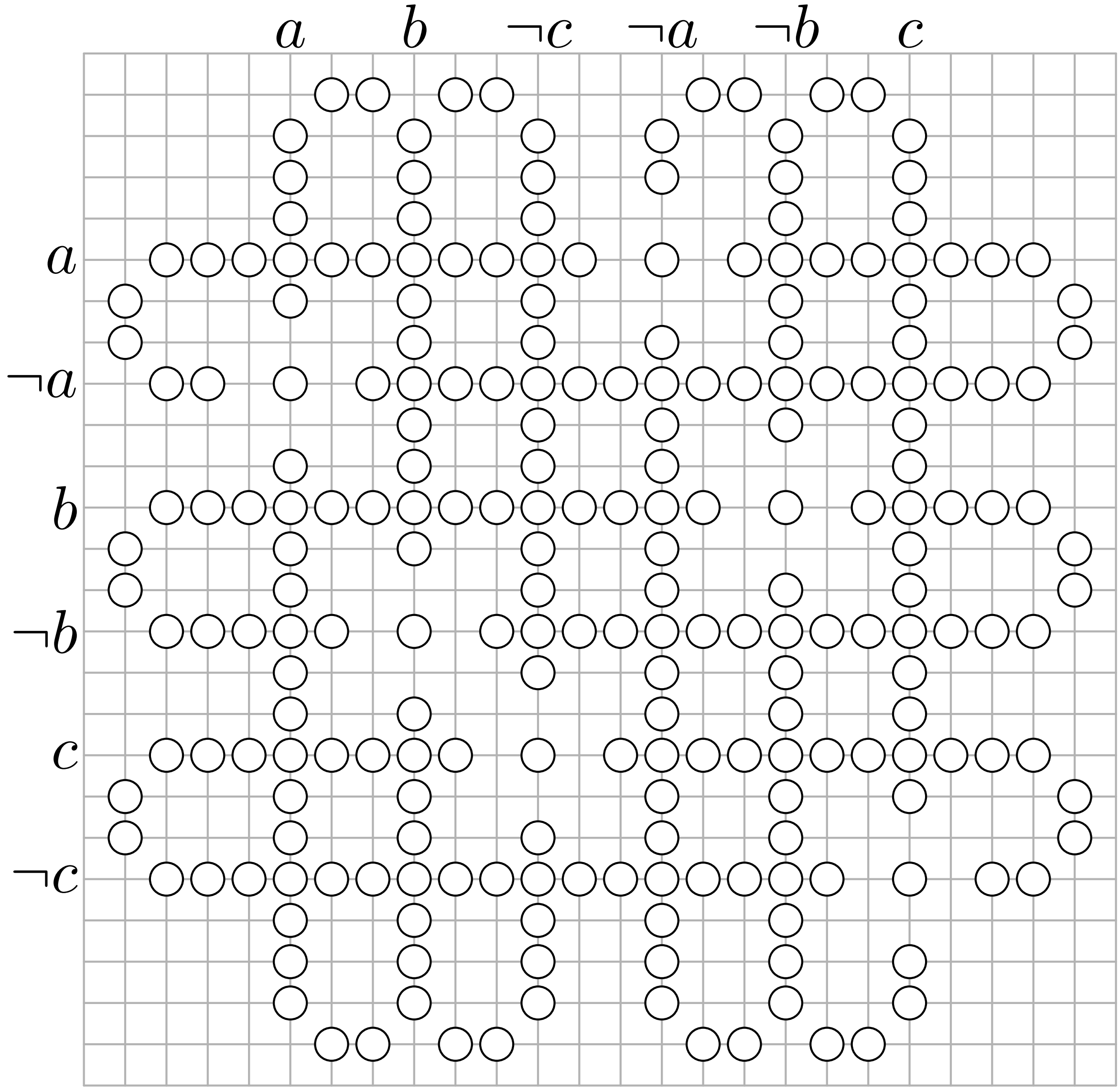

FIG. 3 – codage de la formule $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$.