Corrigé du Partiel

Exercice 1 *Echauffement*

1. Si $\mathcal{C}$ est une classe de complexité. Que signifie être $\mathcal{C}$-complet au sens de la réduction polynomiale ?

R. Voir cours.

Un *littéral* est soit une variable x soit la négation d'une variable $\neg x$. On appellera *clause de taille* n une disjonction de n littéraux $l_1 \vee \ldots \vee l_n$ et *formule de taille* n une conjonction de n clauses $c_1 \wedge \ldots \wedge c_n$.

2. Donner une clause de taille 2 équivalente à l'expression $x \Rightarrow y$ où x et y sont des littéraux.

R. $\neg x \vee y$ est équivalent à $x \Rightarrow y$.

3. En déduire une formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de taille n équivalente à l'expression

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} x_i \Leftrightarrow x_j$$

R. Si l'on transforme directement $x \Leftrightarrow y$ en $\neg x \vee y \wedge \neg y \vee x$ (qui est une formule de taille 2) et que l'on utilise ça sur la formule de départ, on obtient une formule de taille $2n$ (ce qui n'est pas gênant pour la suite du problème vu que c'est quand même linéaire, mais ce n'est pas ce qui était demandé). Il fallait remarquer que la formule indiquée pouvait s'écrire

$$x_1 \Rightarrow x_2 \wedge x_2 \Rightarrow x_3 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \Rightarrow x_n \wedge x_n \Rightarrow x_1$$

ce qui donne la formule

$$\neg x_1 \vee x_2 \wedge \neg x_2 \vee x_3 \wedge \ldots \wedge \neg x_{n-1} \vee x_n \wedge \neg x_n \vee x_1$$

qui elle est de taille n.

4. En déduire une transformation τ de toute formule f en une formule $\tau(f)$ équivalente dans laquelle tout littéral apparaît au plus 2 fois et toute variable au plus 3 fois.

R. Si la variable x apparaît k fois ($k > 3$), on créé k nouvelles variables $x_1, \ldots x_k$, on remplace chacune des occurrences de x par une des variables x_i (donc chaque x_i apparaît exactement une fois à ce stade), puis on doit indiquer que les x_i doivent nécessairement avoir la même valeur de vérité (puisqu'au départ c'était une unique variable, on ne peut pas se permettre d'avoir $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$ par exemple) on ajoute la formule vue dans la question précédente, dans laquelle chacune des variables x_i apparaît 2 fois, une fois sous sa forme positive x_i et une fois sous sa forme négative $\neg x_i$.

On effectue cette transformation pour toutes les variables qui apparaissent strictement plus de 3 fois (ou lorsqu'un littéral apparaît plus de 2 fois).

5. Rappeler la définition de la classe de complexité NP et du langage NP-complet 3-SAT.

R. Voir cours. Il est inacceptable que plusieurs personnes n'aient pas su répondre à cette question (surtout la définition de NP). Par exemple, dire que c'est l'ensemble des problèmes qui ne sont pas solubles en temps polynomial montre une complète incompréhension du cours (et d'ailleurs aussi un manque de connaissance, parce que récité par cœur ça marchait aussi). D'ailleurs si c'était le cas, on ne se demanderait pas si $P = NP$...

Du coup, ceux qui ont dit des choses complètement fausse à cette question, n'ont non seulement pas eu les points de la question, mais ont même eu des points en moins sur le total.

6. Rappeler toutes les étapes nécessaires pour montrer qu'un problème A est NP-complet par réduction au problème B dont on sait qu'il est NP-complet.

R. Mêmes remarques que précédement. On en a fait assez en cours/TD pour que quand même ça rentre. Globalement les réponses étaient meilleures quand même que pour la question précédente.

En gros, les étapes sont :
– Vérifier que le problème A est dans NP (en donnant un algorithme non déterministe, c'est-à-dire par exemple qui devine une solution et la vérifie en temps polynomial). Si on oublie cette étape, on a juste montré que le problème était "NP-dur".
– Expliquer comment on peut transformer n'importe quelle entrée w du problème B en une entrée $\tau(w)$ du problème A de telle sorte que $\tau(w) \in A$ si et seulement si $w \in B$.
– Enfin, vérifier que la transformation τ que l'on a décrite se fait bien en un temps polynomial (sinon, on n'a rien montré du tout).

7. Déduire que le langage 2-3-SAT, la restriction de 3-SAT aux formules dans lesquelles chaque littéral apparaît au plus 2 fois est NP-complet.

R. 2-3-SAT est dans NP parce que c'est une restriction de 3-SAT (donc un algorithme non déterministe qui résout 3-SAT, résout aussi 2-3-SAT). Typiquement, l'algorithme qui "devine" les bonnes valeurs de vérité pour chacune des variables puis vérifie que la formule est vraie fonctionne en temps linéaire (un seul parcours de la formule).

On utilise la transformation τ vue à la question 4. Par construction la formule $\tau(\varphi)$ est équivalente à φ donc soit les deux sont satisfiables, soit aucune ne l'est, et cette construction est clairement faisable en temps polynomial. C'est quadratique si on le fait sans réfléchir : on parcourt la formule une fois pour chaque variable, en comptant combien de fois elle apparaît, puis on remplace toutes les occurrences de la variable par les x_i et on ajoute la formule qui lie les nouvelles variables. Chaque "passe" se fait en temps linéaire, on répète ça autant de fois qu'il y a de variables, donc au final c'est quadratique.

Donc le problème 2-3-SAT est NP-complet.

A ce stade-là, il y avait déjà de quoi avoir 14, rien qu'en répondant correctement à ces questions.

Exercice 2 *Définition du problème*

Nous allons nous intéresser ici à un jeu appelé *Phutball* inventé par John H. Conway. Il se joue sur un plateau $n \times n$ où n est un entier impair. On le représente par une grille sur les intersections de laquelle les joueurs posent des pions. Il existe deux types de pions : la balle, pion noir unique, et les pions blancs. Au début du jeu la grille ne contient que la balle, placée au milieu. Deux joueurs jouent à tour de rôle. Le but du joueur 1 est d'amener la balle sur la colonne la plus à gauche, ou encore plus à gauche de celle-ci, tandis que le joueur 2 essaie d'amener la balle sur ou au-delà de la colonne la plus à droite. A chaque tour, un joueur peut soit placer un pion blanc sur une intersection libre, soit déplacer la balle par un ou plusieurs sauts.

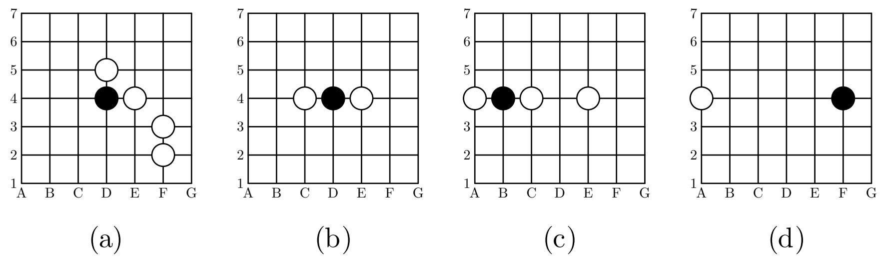


FIG. 1 – exemples de configurations du jeu

La balle peut sauter au dessus d'un segment horizontal ou vertical de pions situé juste à côté d'elle. Les pions sautés sont retirés du plateau. Le joueur peut décider d'enchaîner plusieurs sauts en un seul tour s'il le désire. Dans la position de la figure 1a le joueur peut par exemple poser un joueur en B2, ou encore déplacer la balle de D4 en D6 et retirer le joueur en D5, ou bien déplacer la balle de D4 en F4 et retirer le joueur en E4 ou bien encore déplacer la balle de D4 en F4 puis de F4 en F1 et retirer les joueurs E4, F3 et F2). On note le déroulement d'une partie en indiquant pour chaque tour de jeu la position à laquelle le nouveau joueur est posé ou bien les positions successives de la balle au cours des sauts.
Par exemple, on peut avoir le début de partie : 1. C4, 2. E4, 3. D4-B4, 4. C4, 5. A4, 6. B4-D4-F4. La figure 1b montre la position après le tour 2, la figure 1c après le tour 5 et la figure 1d après le tour 6.

1. Partant de la position illustrée par la figure 1d (c'est au joueur 1 de jouer), proposer une fin de partie (intelligente) en 6 coups dans laquelle le joueur 2 gagne (le joueur 2 essaie d'atteindre la colonne la plus à droite).

R. On pouvait envisager la fin de partie suivante :

1. E4, G4
2. F4-D4, E4
3. C4, D4-F4-gagné

Notez que dans la règle le joueur peut faire plusieurs sauts d'affilée pendant un unique tour (et c'est important pour la suite), c'est ce qu'il fait là au dernier tour. Il saute par-dessus le pion en E4 puis par-dessus celui en G4.

2. La taille du plateau $n \times n$ étant fixée, donner une borne du nombre maximum de choix possibles pour un joueur en un tour.

R. Ici encore, il fallait bien noter qu'un joueur peut faire plusieurs sauts en un seul tour. Déjà si il décide de placer un pion blanc, il y a au plus n^2 possibilités. Si par contre on considère qu'il y a déjà plein de pions blancs sur le plateau et qu'il décide de faire des sauts, alors on sait qu'à chaque saut effectué on retire au moins un pion blanc donc le joueur ne peut pas faire plus de n^2 sauts en un seul tour (ce qui est une majoration très grossière, mais c'est du bon ordre de grandeur).

Chaque saut peut être fait dans l'une des quatre directions, donc il a au plus 4 choix pour le premier saut, puis 4 pour le suivant, etc. Ce qui donne finalement une borne de 4^{n^2} coups possibles (encore une fois, c'est très grossièrement estimé). Ce qui compte c'est de voir que le nombre de coups possibles est potentiellement exponentiel et que donc un algorithme qui essaie tous les coups possibles ne pourra pas fonctionner en temps polynomial.

On s'intéresse au problème de décision suivant. Etant donnée une configuration du plateau (et la taille du plateau) il faut décider s'il est possible de gagner la partie en un coup.

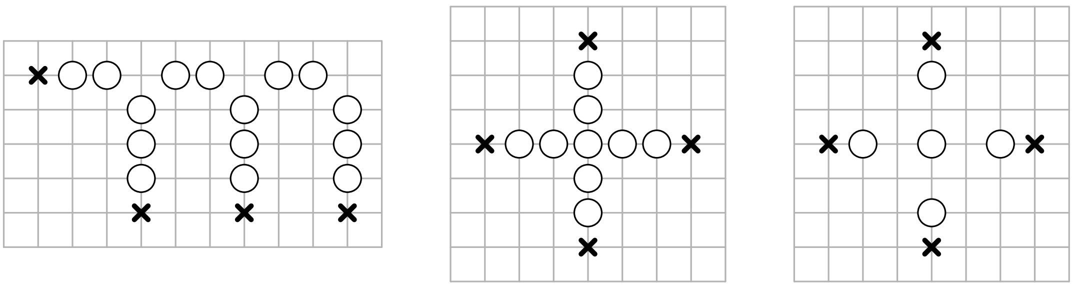
3. Montrer que le problème est dans NP.

R. Tout d'abord, pour gagner en un coup, il est évident que le joueur doit faire des sauts (parce que poser un pion blanc, ça ne fait pas gagner immédiatement). On a vu qu'en un tour un joueur peut faire au plus n^2 sauts consécutifs, on peut donc imaginer un algorithme non déterministe qui "devine" une séquence de sauts de longueur inférieure à n^2 puis qui les simule à partir de la configuration actuelle. Cet algorithme fonctionne donc en temps quadratique (simuler n^2 sauts se fait en temps n^2) et l'algorithme ne se trompe jamais quand il affirme qu'il a trouvé une solution, de même que s'il existe une solution, l'algorithme peut la trouver en temps polynomial "s'il a de la chance".

Le problème est donc bien dans NP.

Exercice 3 *Gadgets : sélecteurs, croisements et fusibles*

La figure 2 représente les trois principaux types de gadgets utilisés par la suite. La balle est située sur l'une des croix.



(a) (b) (c)

FIG. 2 – gadgets en tous genres

1. La figure 2a représente un *3-sélecteur vertical*. Expliquer (rapidement) le principe d'un sélecteur et toutes les manières pour la balle de le traverser par des sauts en partant d'une croix.

R. L'idée du sélecteur est que commençant avec la balle sur n'importe laquelle des croix, le joueur peut amener la balle sur n'importe quelle autre croix. En pratique, ce qui nous intéressera surtout c'est de passer de la croix de gauche à l'une des croix du bas, ou de l'une des croix du bas à celle de gauche.

Il faut voir aussi que le sélecteur est "détruit" lorsque la balle est passée une fois d'une des deux façons décrites plus haut. Si la balle est passée de la gauche au bas ou du bas à gauche, il n'est plus possible de refaire un tel passage une seconde fois (pendant le même tour) puisque la communication entre la croix de gauche et les branches qui vont vers le bas a été supprimée.

2. La figure 2b représente un *croisement*. Après un premier saut, expliquer si et comment la balle peut à nouveau le traverser en partant d'une croix.

R. Le croisement permet à la balle de traverser à la fois horizontalement et verticalement pendant le même tour. En effet, si la balle se trouve à un moment sur la croix du bas par exemple, elle peut traverser le croisement vers la croix du haut (en supprimant toute la colonne verticale). De là, si le joueur décide de faire d'autres sauts il se peut que la balle finisse par se retrouver sur la croix de gauche, et la balle peut alors sauter d'abord jusqu'au centre du croisement puis sur la croix de droite. Une fois que le croisement a été traversé dans les deux directions il a totalement disparu et ne peux donc plus être traversé.

3. Mêmes questions avec le *fusible* représenté sur la figure 2c.

R. Le fusible ressemble au croisement mais il ne peut être traversé que dans l'une des directions. Si le joueur choisit de traverser le fusible à partir de la croix de gauche par exemple, alors en trois sauts il atteint la croix de droit mais il a alors supprimé le pion central du fusible. Si par la suite (toujours pendant le même tour, après d'autres sauts) la balle se retrouve sur la croix du haut, elle ne peut plus traverser le fusible...

Le fusible diffère donc du croisement en ce sens que le croisement peut être traversé dans les deux directions pendant un même tour tandis que pour le fusible, le joueur peut choisir dans quelle direction il veut le traverser mais il ne peut le faire qu'une fois.

Exercice 4 *Preuve de NP-complétude*

On va procéder par réduction à 3-SAT. Les formules de 3-SAT sont codées de la façon suivante. Soit f une formule à m variables $v_1, \dots, v_m$ et n clauses $c_1, \dots, c_n$.
A chaque variable v_i on associe deux lignes du plateau (celle du haut associée à v_i et celle du bas à $\neg v_i$). A chaque extrémité se trouve un 2-sélecteur horizontal. A chaque clause c_j on associe trois colonnes du plateau, une par littéral de la clause. A chaque extrémité se trouve un 3-sélecteur vertical.
Si le k-ème littéral de la clause c_j est la variable v_i (resp. $\neg v_i$) alors on place un croisement à l'intersection de la colonne du littéral et de la ligne de v_i (resp. $\neg v_i$). et un fusible à l'intersection de la colonne du littéral et de la ligne de $\neg v_i$ (resp. v_i). On place des croisements à toutes les intersections inoccupées.
La figure 3 représente le codage de la formule $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$ (on a un peu compressé les croisements et les fusibles, mais l'idée y est et c'était encore moins lisible sinon).

1. Expliquer comment compléter la construction (de telle sorte que ça marche dans le cas général) pour que la configuration du plateau obtenue permette de gagner en un coup si la formule de départ est dans 3-SAT. Pour cela, indiquez où l'on doit placer le ballon et où il faut rajoutter des pions blancs (qui serviront de connexions) pour que le joueur 1 ait un coup gagnant (en plusieurs sauts) si et seulement si la formule est vraie.

Compléter la construction sur la figure (dans ce cas, ne pas oublier de rendre la figure).

R. Alors là ça se compliquait très sérieusement, et j'avoue que je n'attendais pas vraiment de vous que vous répondiez correctement à cette question (d'autant plus que si vous aviez déjà répondu aux questions précédentes il ne restait plus beaucoup de temps).

J'ai remplacé la figure par la version complétée. Pour gagner à ce tour-ci, le joueur va devoir faire sortir la balle par le coin en bas à gauche (c'est le seul saut qui lui permettrait de sortir).

Partant du coin en haut à gauche où se trouve le ballon, le joueur doit décider (à l'aide d'un sélecteur) de traverser la grille horizontalement au niveau de la ligne a ou $\neg a$. Une fois de l'autre côté, il doit choisir entre b ou $\neg b$ et enfin, une fois revenu à gauche il doit choisir entre c et $\neg c$. Notons au passage qu'il a la possibilité de traverser la ligne a vers la droite puis la $\neg a$ vers la gauche mais ça le bloque nécessairement sans qu'il ait pu atteindre le coing bas gauche. S'il existe donc une façon de gagner, elle passe donc par exactement l'une des deux lignes x ou $\neg x$ pour toute variable x. Pour chacune de ces variables, le choix entre la ligne x ou $\neg x$ signifie en fait que l'on choisit soit que la variable est affectée à la valeur *vrai* (ligne x) soit qu'elle est affectée à la valeur *faux* (ligne $\neg x$).

Une fois la ligne en c traversée, le joueur peut (et doit s'il cherche vraiment une solution) prendre l'angle en bas à droite. Il arrive alors sur un sélecteur correspondant à la clause $(\neg a \vee \neg b \vee c)$. Ce que l'on remarque, c'est que la colonne correspondant à $\neg a$ croise toutes les lignes par des *croisements*, sauf la ligne a, qu'elle croise à l'aide d'un *fusible*. De même la colonne $\neg b$ croise la ligne b par un *fusible* et la colonne c croise la ligne $\neg c$ par un *fusible* (les autres intersections sont des *croisements*).

Cela signifie que si en début de coup on avait choisi la ligne a par exemple, alors une fois sur le sélecteur de la clause $(\neg a \vee \neg b \vee c)$ on ne peut pas remonter par la colonne $\neg a$ (puisque l'on devrait passer par un fusible qu'on a déjà "désamorçé"). Ainsi, si l'on veut remonter, il faut trouver un littéral dans la clause qui est en accord avec les choix que l'on a fait au début du coup.

Si un tel choix existe, on peut alors monter, puis atteindre le sélecteur correspondant à la seconde clause $(a \vee b \vee \neg c)$ où l'on doit de nouveau emprunter une colonne pour redescendre qui ne passe pas par un fusible déjà visité, c'est-à-dire choisir un littéral qui est en accord avec les choix que l'on a fait au début.

Si l'on arrive à redescendre, cela signifie que l'on a trouvé une affectation des variables qui rend la formule vraie (un des littéraux de chaque clause était vrai puisqu'on a réussi à toutes les traverser) et l'on peut donc atteindre le coin inférieur gauche et faire le dernier saut qui permet de faire sortir la balle par le bord gauche.

Ainsi, s'il existe une affectation des variables qui rend la formule vraie alors il existe une suite de sauts qui permet au joueur de gagner en un coup, mais s'il n'existe pas de telle affectation alors quels que soient les sauts que fait le joueur il n'arrivera pas à gagner en un coup.

On a donc bien réduit notre problème à 3-SAT.

2. Montrer que si on peut gagner en un coup alors la formule correspondante est dans 3-SAT.

R. Ca a été fait dans la réponse précédente.

3. Terminer la preuve de NP-complétude du problème étudié.

R. Il suffit de vérifier que la transformation d'une formule en la configuration correspondante de notre problème est faisable en temps polynomial. La construction étant très directe (on colle des gadgets sans bien réfléchir) il est facile de voir qu'elle se fait en temps quadratique (on a fait une grille, donc la configuration qu'on obtient est de taille quadratique en la taille de la formule d'origine).

On a ainsi fini la réduction, ce qui clôt la preuve de NP-complétude.

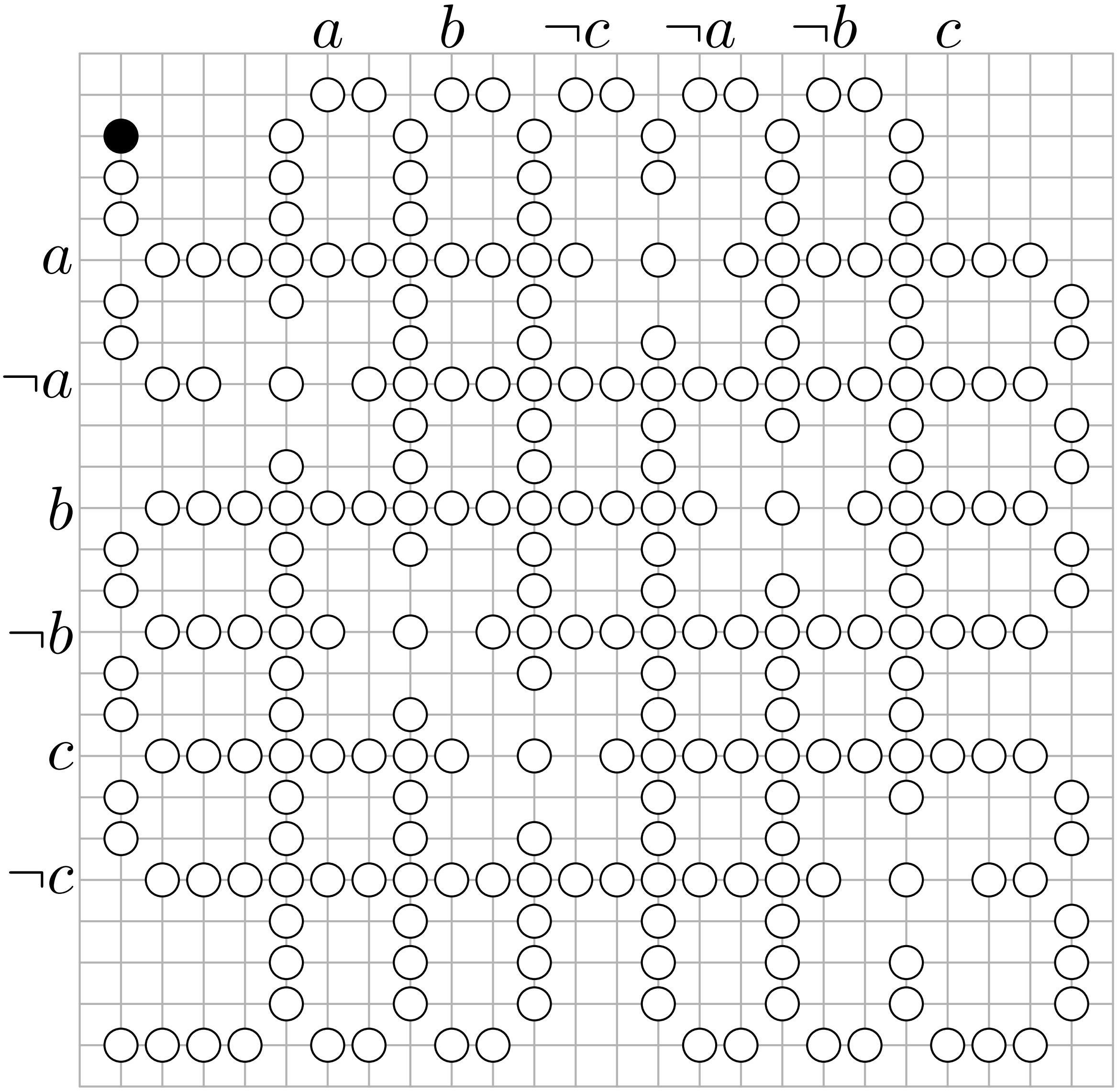


FIG. 3 – codage de la formule $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$.