TD12. The Postman (un film de Kevin Costner)

Exercice 1 *Problème de correspondance de Post*

On se donne un alphabet fini Σ et un ensemble fini P de paires de mots sur Σ. On veut savoir s'il existe une suite finie (non vide) (v_i, w_i) d'éléments de P telle que le mot formé par concaténation des v_i soit égal au mot formé par concaténation des w_i.
Ce problème se transforme en *problème de correspondance de Post modifié* (**PCPM**) lorsque le premier terme de la suite est fixé a priori.

1. Résoudre **PCP** pour les instances suivantes :
- $P = \{(abb, ab), (bab, ba), (aab, abab)\}$
- $P = \{(a, ab), (ba, aba), (b, aba), (bba, b)\}$
- $P = \{(ab, bb), (aa, ba), (ab, abb), (bb, bab)\}$

2. Montrer que si Σ ne contient qu'une lettre, le problème est décidable. Et si Σ contient exactement deux lettres ? Trois ?

3. Montrer que **PCPM** et **PCP** sont équivalents.

4. Peut-on se passer des couples de la forme (w, w) ?

5. Montrer que **PCP** est indécidable. Pour ce faire on pourra associer à une machine de Turing M et un mot w une instance du problème de Post, simulant le fonctionnement de M sur l'entrée w, de telle manière que le problème de Post admette une solution si et seulement si le calcul de M sur l'entrée w s'arrête.

Exercice 2 *Récursénumérabilitexpialidocious*

1. Montrer qu'il existe une fonction partielle calculable ψ qui ne peut pas être étendue à une fonction récursive totale.

2. Montrer qu'une fonction est récursive si et seulement si son graphe est récursivement énumérable.

3. Montrer que tout ensemble récursivement énumérable infini contient un sous-ensemble infini récursif.

4. Montrer qu'il existe une infinité dénombrable d'ensembles récursivement énumérables non récursifs.

5. Soit $\mathcal{RE}$ l'ensemble des ensembles récursivement énumérables, $A \in \mathcal{RE}$ infini. Montrer que $\{A \cap B / B \in \mathcal{RE}\}$ est isomorphe, pour l'ordre défini par l'inclusion, à $\mathcal{RE}$.