TD9. Mots infinis, théorème de Büchi et limites de langages

Dans tout le sujet, A désigne l'alphabet $\{a, b\}$ et Σ désigne un alphabet fini quelconque. On rappelle que pour un automate $\mathcal{A}$ fini (déterministe ou non) $L_+(\mathcal{A})$ est le langage rationnel reconnu par l'automate et $L_\omega(\mathcal{A})$ est le langage de mots infinis reconnu par l'automate (les mots tels qu'un chemin passe une infinité de fois par un état final).
Les langages ω-rationnels sont définis comme étant la plus petite partie de Σ^ω telle que :
- $\forall R \subseteq \Sigma^*$, si R est rationnel alors R^ω est ω-rationnel
- $\forall R \subseteq \Sigma^*, L \subseteq \Sigma^\omega$, si R est rationnel et L est ω-rationnel alors $R.L$ est ω-rationnel
- $\forall L, L' \subseteq \Sigma^\omega$, si L et L' sont ω-rationnels alors $L \cup L'$ est ω-rationnel

Exercice 1 *Théorème de Büchi*

1. Donner un automate $\mathcal{A}$ tel que $L_\omega(\mathcal{A}) = A^+b^\omega$.
2. Donner un automate déterministe $\mathcal{A}$ tel que
$$L_\omega(\mathcal{A}) = \{u \in A^\omega \quad | \quad |u|_a = |u|_b = \infty\}$$
3. Soit $L \in \mathrm{Rec}(\Sigma^+)$ un langage rationnel de mots finis. Construire un automate qui reconnaît le langage de mots infinis L^ω.
4. Montrer que tout langage ω-rationnel peut être reconnu par un automate de Büchi.
5. Réciproquement, montrer que tout langage de mots infinis reconnu par automate de Büchi est ω-rationnel.

Exercice 2 *Langages déterministes*

1. Étant donnés deux automates déterministes $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, construire des automates déterministes qui reconnaissent les langages $L_\omega(\mathcal{A}_1) \cup L_\omega(\mathcal{A}_2)$ et $L_\omega(\mathcal{A}_1) \cap L_\omega(\mathcal{A}_2)$.

Si $L \subseteq \Sigma^+$ est un langage de mots finis, on appelle limite du langage L le langage de mots infinis
$$\overrightarrow{L} = \{u \in \Sigma^\omega \quad | \quad u(1)u(2)\ldots u(n) \in L \text{ pour une infinité d'entiers } n\}$$

2. Montrer que $\overrightarrow{A^+b}$ est l'ensemble des mots $u \in A^\omega$ tels que $|u|_b = \infty$.
3. Calculer $\overrightarrow{A^+}$ et $\overrightarrow{a^+b}$.
4. Montrer que le langage A^+a^ω n'est pas limite d'un langage de mots finis.
5. L'ensemble $\{\overrightarrow{L} \mid L \subseteq \Sigma^+\}$ des limites des langages de mots finis sur Σ est-il clos par union ? par complémentaire ?
6. Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ un automate déterministe. Montrer que $L_\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{L_+(\mathcal{A})}$. Cette égalité est-elle toujours vérifiée si $\mathcal{A}$ n'est pas déterministe ?
7. Montrer que l'ensemble $\{\overrightarrow{L} \mid L \in \mathrm{Rec}(\Sigma^+)\}$ des limites de langages rationnels sur Σ est clos par union et intersection mais pas par complémentaire.
8. L'ensemble $\{\overrightarrow{L} \mid L \subseteq \Sigma^+\}$ des limites de langages de mots finis sur Σ est-il clos par intersection ?