TD9. Langages algébriques et automates à pile

Exercice 1
Les langages suivants sont-ils algébriques ? (si oui, donner un automate à pile reconnaissant le langage)
- $L_1 = \{u \in \{a,b\}^*, |u|_a = |u|_b\}$
- $L_2 = \{u \in \{a,b\}^*, |u|_a = 2|u|_b\}$
- $L_3 = \{a^p, p \text{ premier}\}$
- $L_4 = \{\mathrm{bin}(i)\overline{\mathrm{bin}(i+1)}$, où $\mathrm{bin}(i)$ est l'écriture en base 2 de $i\}$
- L_5, l'ensemble des mots bien parenthésés sur $\{(,)\}$
- $L_6 = \{a^i b^j, j = i^2\}$

Exercice 2
Montrer que si L est un langage algébrique et R est un langage rationnel, alors $L \cap R$ est algébrique. Montrer que les langages algébriques ne sont pas stables par intersection.

Exercice 3
Montrer que tout langage algébrique sur l'alphabet $\{a\}$ est rationnel (on pourra montrer qu'il existe un N_0 et un p tels que pour tout mot w, si $|w| > N_0$ alors $w(a^p)^* \subseteq L$).

Exercice 4
Pour tout langage L sur Σ, on définit $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^*$ tel que $|x| = |y|$ et $xy \in L\}$.

1. Montrer que le langage $L = \{a^n b^n c^m d^3 m, \quad n,m \geq 1\}$ est algébrique.
2. Calculer $\frac{1}{2}L$.
3. Montrer que $\frac{1}{2}L$ n'est pas algébrique.

Exercice 5
Soit Σ un alphabet fini. Soient u et v deux mots sur Σ^*. On appelle mélange des mots u et v, et l'on note $\mathrm{Mel}(u,v)$ l'ensemble des mots de Σ^* défini par :
- si $u = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u,v) = \{v\}$
- si $v = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u,v) = \{u\}$
- si $u = xu'$ et $v = yv'$ avec $x, y \in \Sigma$, $\mathrm{Mel}(u,v) = x.\,\mathrm{Mel}(u',v) \cup y.\,\mathrm{Mel}(u,v')$.

Si L et L' sont deux langages, on définit $\mathrm{Mel}(L,L') = \bigcup_{u \in L, v \in L'} \mathrm{Mel}(u,v)$.
1. On prend $\Sigma = \{a,b\}$ et l'on considère les deux langages $L = (aa)^*$ et $L' = (bbb)^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L,L')$ est rationnel.
2. Le mélange de deux langages rationnels est-il toujours rationnel ?
3. Soit $\Sigma = \{a,b,c\}$. On considère $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et $L' = c^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L,L')$ est algébrique.
4. Montrer que le mélange d'un langage rationnel et d'un langage algébrique est algébrique.
5. Qu'en est-il du mélange de deux langages algébriques ?