TD9. Automates à pile

Définition 1. Un automate à pile (PDA) est un heptuplet $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ où :
- Q est un ensemble fini d'états.
- Σ est un ensemble fini dit alphabet de l'automate.
- Γ est un ensemble fini dit alphabet de la pile.
- δ est la fonction de transition : $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$.
- $q_0 \in Q$ est l'état initial.
- $Z_0 \in \Gamma$ est le symbole de départ de pile.
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finals.

Définition 2. Une configuration de l'automate est représentée sous la forme $\langle q, w, \gamma \rangle$ où $q \in Q$ est l'état courant de l'automate, $w \in \Sigma^*$ est le mot qui reste à lire et $\gamma \in \Gamma^*$ décrit le contenu de la pile (le haut de pile en début de mot).

Définition 3. Pour un PDA $\mathcal{A}$ donné, on définit la relation $\to_{\mathcal{A}}$ par $\langle q, aw, Z\alpha \rangle \to_{\mathcal{A}} \langle p, w, Z'\alpha \rangle$ si $(p, Z') \in \delta(q, a, Z)$ où $a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$. On note $\to_{\mathcal{A}}^*$ la fermeture réflexive et transitive de $\to_{\mathcal{A}}$.

Définition 4. Soit $\mathcal{A}$ un PDA. On appelle $L(\mathcal{A})$ le langage reconnu par les états finals de A, i.e $w \in L(\mathcal{A})$ ssi $\langle q_0, w, Z_0 \rangle \to_{\mathcal{A}}^* \langle q, \epsilon, \gamma \rangle$ avec $q \in F$. On appelle $N(\mathcal{A})$ le langage reconnu par pile vide de A, i.e $w \in L(\mathcal{A})$ ssi $\langle q_0, w, Z_0 \langle \to_{\mathcal{A}}^* \rangle q, \epsilon, \epsilon \rangle$

Question 1. Montrer que les langages $L_1 = \{w\overline{w} \mid w \in \Sigma^*\}$ et $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. sont est reconnaissables par automate à pile (états finaux ou pile vide).

Question 2. Montrer qu'un langage est reconnu par un PDA par états finaux si et seulement si il est reconnu par un PDA par pile vide.

On se propose maintenant de montrer le théorème suivant :

Theorème 1. *Un langage L est algébrique si et seulement si il est reconnu par un PDA par pile vide.*

Question 3. On considère un langage algébrique ne contenant pas ε. Soit G une grammaire sous forme normale de Greibach produisant L. Montrer qu'il existe un PDA $\mathcal{A}$ à un état qui reconnaît les mots de L (on pourra construire $\mathcal{A}$ de telle sorte qu'il simule une dérivation la plus à gauche d'un mot de L).

Réciproquement, on se donne un PDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ reconnaissant le langage L (par pile vide). On cherche alors à construire une grammaire dont les constantes sont les symboles de Σ et les variables sont des éléments de

$$\{S\} \cup \{[q, Z, p] \mid (q, p) \in Q^2 \,,\, Z \in \Gamma\}$$

telle que $\forall x \in \Sigma^*, \forall (q, p) \in Q^2, \forall Z \in \Gamma$,

$$([q, Z, p] \Rightarrow^* x) \Leftrightarrow (\langle q, x, Z \rangle \to^* \langle p, \varepsilon, \varepsilon \rangle)$$

Question 4. Expliquer comment construire une telle grammaire. Montrer que la propriété recherchée est bien satisfaite.

Question 5. Compléter la grammaire précédente pour qu'elle engendre tous les mots de L à partir du symbole S. Conclure.

Question 6. Montrer que l'intersection d'un langage algébrique avec un langage rationnel est algébrique.

On s'intéresse maintenant aux automates à pile déterministes c'est-à-dire ceux pour lesquels il n'y a à chaque étape de la reconnaissance qu'une seule transition possible (en lisant une lettre ou ϵ).

Question 7. Soit L un langage reconnu par un PDA déterministe par pile vide. Montrer qu'aucun mot de L n'est préfixe propre d'un autre.

Question 8. Montrer que le langage $\{a^n b^n\} \cup \{a^n b^{2n}\}$ n'est pas reconnu par un automate à pile déterministe par états final, alors qu'il est reconnu par un PDA non déterministe.