

TD7. Grammaires contextuelles et algébriques

Exercice 1 Quels sont les langages engendrés par les productions suivantes ?

a)

$$\begin{array}{ll} S \longrightarrow aSBC \mid aBC & bB \longrightarrow bb \\ CB \longrightarrow BC & bC \longrightarrow bc \\ aB \longrightarrow ab & cC \longrightarrow cc \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} S \longrightarrow CD & Ab \longrightarrow bA \\ C \longrightarrow aCA \mid bCB & Ba \longrightarrow aB \\ AD \longrightarrow aD & Bb \longrightarrow bB \\ BD \longrightarrow bD & C \longrightarrow \epsilon \\ Aa \longrightarrow aA & D \longrightarrow \epsilon \end{array}$$

c)

$$S \longrightarrow aS \mid aSbS \mid \epsilon$$

Exercice 2

Donner des grammaires engendrant les langages suivants.

- 1 - $\{a^i b^j c^k, i > j\}$
- 2 - $\{a^i b^j c^k, i \neq j\}$
- 3 - $\{a^{2^n}, n \geq 0\}$
- 4 - $\{a^{n^2}, n \geq 0\}$

Exercice 3

Montrer que le langage $L = \{ww, w \in \{a,b\}^*\}$ n'est pas algébrique alors que son complémentaire l'est.

Exercice 4

Donner des grammaires algébriques engendrant les langages suivants :

- 1 - l'ensemble des mots bien parenthésés ;
- 2 - $\{a^i b^j c^k, i \neq j \text{ ou } j \neq k\}$;
- 3 - l'ensemble des mots sur $\{a,b\}$ ayant le même nombre d'occurrences de a que de b ;
- 4 - l'ensemble des mots sur $\{a,b\}$ ayant deux fois plus de a que de b ;
- 5 - $\{w\#\bar{w}\#, w \in \{a,b\}^*\}$;

Exercice 5

Montrer que la grammaire suivante engendre le langage $\{a^p \mid p \text{ premier}\}$.

$Z \in \{A, B\}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$.

$$\begin{array}{lll} S \longrightarrow a^2 \mid a^3 \mid a^5 \mid a^7 & & \\ \begin{array}{lll} S \longrightarrow Y_1 A^6 X_3 & Y_1 \longrightarrow Y_1 A^2 & Y_1 A^3 \longrightarrow X_1 A^3 X_2 \\ Z A X_2 A \longrightarrow D Y_2 Y_i E & Z D Y_2 \longrightarrow D Y_2 Z & X_1 D Y_2 \longrightarrow X_1 B Y_3 \\ Y_3 Z \longrightarrow Z Y_3 & Y_3 Y_i E \longrightarrow Y_i Y_3 E & Y_3 E Z \longrightarrow Z Y_3 E \\ Y_3 E X_3 \longrightarrow Y_4 C X_3 & Z Y_4 \longrightarrow Y_4 Z & Y_i Y_4 \longrightarrow Z X_2 \\ X_1 B \longrightarrow X_1 Y_5 & Y_5 B \longrightarrow B Y_5 & Y_5 X_2 A \longrightarrow Y_6 X_2 A \\ B Y_6 \longrightarrow Y_6 A & X_1 Y_6 \longrightarrow X_1 A & X_1 Y_8 \longrightarrow X_1 A \\ C X_3 \longrightarrow Y_7 X_3 & C Y_7 \longrightarrow Y_7 A & B A^j X_2 Y_7 \longrightarrow Y_8 A^{j+1} X_2 \\ A^4 X_2 Y_7 \longrightarrow Y_8 A^4 X_2 & A Y_8 \longrightarrow Y_8 A & B Y_8 \longrightarrow Y_8 A \\ X_2 X_3 \longrightarrow Y_9 a & A Y_9 \longrightarrow Y_9 a & X_1 Y_9 \longrightarrow a a \end{array} \end{array}$$