TD4. Une généralisation de l'exercice 5 du TD3

Pour $L \subseteq \Sigma^*$ et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on note PREF(L, f) le langage suivant :

$$\text{PREF}(L, f) = \{u \in \Sigma^* : \exists v \in \Sigma^*, uv \in L \text{ et } |v| = f\big(|u|\big)\}.$$

Le but de l'exercice est d'établir une caractérisation de l'ensemble PREF des fonctions f telles que PREF(L, f) est rationnel pour tout langage L rationnel :

$$\text{PREF} = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : L \text{ rationnel } \Rightarrow \text{PREF}(L, f) \text{ rationnel}\}.$$

La caractérisation recherchée repose sur la notion d'ultime périodicité. Un ensemble $U \subseteq \mathbb{N}$ est dit ultimement périodique s'il existe $n_0, p \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq n_0, n \in U \Leftrightarrow n + p \in U.$$

On notera que les ensembles ultimement périodiques sont stables par intersections finies et unions finies. Une fonction *préserve l'ultime périodicité* si pour tout ensemble ultimement périodique U, l'ensemble $f^{-1}(U) = \{x : f(x) \in U\}$ est ultimement périodique.

Nous allons montrer le résultat suivant :

$$f \in \text{PREF} \Leftrightarrow f \text{ préserve l'ultime périodicité.} \tag{1}$$

Question 1. *Montrer que si $A \subseteq \Sigma^*$ est rationnel alors $|A| = \{|u| : u \in A\}$ est ultimement périodique.*

Question 2. *Montrer réciproquement que si U est ultimement périodique alors $\{u \in \Sigma^* : |u| \in U\}$ est rationnel.*

Question 3. *Montrer que si $f \in$ PREF, alors $\forall k, m \in \mathbb{N}$ l'ensemble $f^{-1}\big(\{n : n \equiv k\ [m]\}\big)$ est ultimement périodique.* (On pourra considérer les langage « $(a^m)^* a^j$ »).

Question 4. *Montrer que si $f \in$ PREF, alors $\forall k \in \mathbb{N}$ l'ensemble $f^{-1}(k)$ est ultimement périodique.* (On pourra considérer le langage « $a^* b a^k$ »).

Question 5. *Soit f une fonction telle que pour tout langage rationnel L, le langage*

$$REF(L, f) = \{u \in \Sigma^* : \exists v \in L \textit{ tel que } |v| = f\big(|u|\big)\}$$

est aussi rationnel. Montrer que $f \in$ PREF.

Question 6. *Montrer la caractérisation 1.*

Question 7. *Montrer que PREF est stable par composition, par addition et par multiplication.*