TD3. Automates et langages rationnels

Exercice 1
Trouver un automate fini déterministe reconnaissant les entiers écrits en base 2 qui sont congrus à 0 modulo 3.

Exercice 2
Donner un automate fini déterministe qui reconnaisse l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ dont la $i^{ième}$ lettre en partant de la fin est un a.

Exercice 3 Parmi les langages suivants lesquels sont rationnels ? Justifiez vos réponses.
1 - $\{a^{2n},\ n \geq 0\}$
2 - $\{a^m b^n a^{m+n},\ m \geq 0 \text{ et } n \geq 0\}$
3 - $\{a^p,\ p \text{ premier}\}$
4 - L'ensemble des mots qui n'ont pas trois a consécutifs
5 - L'ensembles des mots qui ont un nombre égal de a et de b
6 - L'ensemble des mots qui sont des palindromes sur $\Sigma = \{a, b\}$
7 - $\{uv\overline{u} \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$ où $\overline{u}$ est le miroir de u, $\overline{abb} = bba$
8 - $\{u\overline{u}v \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$
9 - $\{a^i b^j, \text{pgcd}(i, j) = 1\}$
10 - $\{a^i b^j, i \geq j\}$

Exercice 4
Un ensemble d'entiers est linéaire s'il est de la forme $\{c + ip, i \in \mathbb{N}\}$. Un ensemble est semi-linéaire s'il est réunion finie d'ensembles linéaires. Soit $L \subseteq a^*$ un langage rationnel, montrer que $\{i,\ a^i \in L\}$ est semi-linéaire.
En déduire que pour tout langage L rationnel, l'ensemble $\lambda(L) = \{|w|, w \in L\}$ est semi-linéaire.

Exercice 5
Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ. Montrer que les langages suivants sont rationnels.
1 - $\text{CYCLE}(L) = \{x_1x_2,\ x_1, x_2 \in \Sigma^* \text{ et } x_2x_1 \in L\}$
2 - $\text{MAX}(L) = \{x \in L,\ \forall y \neq \epsilon, xy \notin L\}$
3 - $\text{MIN}(L) = \{x \in L, \text{ aucun préfixe propre de } x \text{ n'est dans } L\}$
4 - $\text{INIT}(L) = \{x \in \Sigma^*,\ \exists y \in \Sigma^*,\ xy \in L\}$
5 - $\overline{L} = \{x, \overline{x} \in L\}$
6 - $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^*,\ \exists\ y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|\}$
7 - $\text{SQRT}(L) = \{x \in \Sigma^*,\ \exists\ y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|^2\}$
8 - $\text{LOG}(L) = \{x \in \Sigma^*,\ \exists\ y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = 2^{|x|}\}$
Montrer que pour un langage L rationnel le langage suivant n'est pas nécessairement rationnel.
9 - $\text{BORD}(L) = \{w \in \Sigma^*, \exists x, y, z \in \Sigma^*, |x| = |y| = |z|, w = xz \text{ et } xyz \in L\}$