Partiel - Durée 2 heures

Les notes et polycopiés de cours et de TD sont autorisés. Tout résultat vu en cours ou en TD peut être réutilisé sans preuve (en indiquant alors qu'il a été vu en cours ou TD).
Remarque 1 : L'énoncé du partiel est très probablement *beaucoup trop long* pour être fait en 2 heures. Il sera tenu compte de la longueur lors de la correction, il est donc *normal* de ne pas faire tous les exercices.
Remarque 2 : Les différents exercices sont totalement indépendants et de difficulté très variable. N'hésitez pas à passer à un autre exercice en cas de grande difficulté, sans pour autant oublier d'en résoudre quelques uns. Il est possible que certaines questions admettent des solutions très simples, ne vous sentez pas obligés de détailler excessivement dans un tel cas.

Exercice 1.

Les langages suivants (sur $\Sigma = \{a, b\}$) sont-ils rationnels ? Justifiez votre réponse et donnez le nombre d'états de l'automate minimal (complet) en cas de rationalité.
- L_1, l'ensemble des mots dont tout préfixe contient plus de a que de b.
- L_2, l'ensemble des mots contenant autant de fois le facteur ab que le facteur ba.
- $L_3 = \{a^{23n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $L_4 = \{xy \mid x, y \in \Sigma^+ \text{ et } x \leq_{\text{lex}} y\}$ (où $\leq_{\text{lex}}$ est l'ordre lexicographique usuel sur Σ^*)

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que le langage $L_f = \{a^n b^{f(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ soit rationnel.
Montrer que $f(\mathbb{N})$ est fini et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(n)$ est ultimement périodique.

Exercice 3.

Soit L un langage rationnel infini. Montrer qu'il existe une famille infinie $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de langages rationnels infinis deux à deux disjoints telle que

$$L = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_i$$

Exercice 4.

Soit L un langage rationnel sur un alphabet fini Σ quelconque. On munit Σ d'un ordre total et l'on considère l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}}$ sur Σ^*. On définit le langage

$$L_{\text{lex}} = \{w \in L \quad | \quad \forall x \in L, |x| = |w| \Rightarrow w \leq_{\text{lex}} x\}$$

(Pour chaque longueur de mots dans L, on ne garde que le plus petit pour l'ordre lexicographique.) Montrer que L_{lex} est rationnel.

Exercice 5.

Les questions suivantes sont indépendantes.
Question 1. Existe-t-il un langage L (sur un alphabet fini quelconque) ayant un nombre infini de résiduels distincts et tel que tous ses résiduels soient rationnels ?
Question 2. Montrer que de tout langage infini on peut extraire un sous-langage non rationnel.
Question 3. L'ensemble des expressions rationnelles bien formées sur l'alphabet $\{(,), a, b, |, *\}$ est-il rationnel ?

Exercice 6.

Dans tout cet exercice, on considèrera l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Définition 1 (automate de prédiction). *Un* automate de prédiction $\mathcal{A}$ *(sur l'alphabet Σ) est un quintuplet $(Q, q_0, Q_a, Q_b, \delta)$ où*
- *Q est un ensemble fini (les états de $\mathcal{A}$)*
- *$q_0 \in Q$ est l'état initial*
- *$Q_a \subseteq Q$*
- *$Q_b \subseteq Q$*
- *$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est la fonction de transition de A*

(on peut voir ces automates comme des automates finis déterministes ayant deux ensembles d'états terminaux)

Définition 2 (mots infinis). *Un* mot infini *w sur Σ est une suite $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans Σ.*

Définition 3 (parcours d'un mot). *Soit $\mathcal{A}$ un automate de prédiction et w un mot infini sur Σ. Le* parcours de w sur *$\mathcal{A}$ est défini comme étant la suite $(q(w)_i)_{i\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans Q avec*

$$\begin{aligned} & q(w)_0 = q_0 \\ \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad & q(w)_{n+1} = \delta(q(w)_n, w_n) \end{aligned}$$

Définition 4 (prédiction). *Soit w un mot infini sur Σ et $\mathcal{A}$ un automate de prédiction. On dira que l'automate $\mathcal{A}$* prédit *le mot infini w si le parcours de w sur $\mathcal{A}$ passe un nombre infini de fois par des états de $Q_a \cup Q_b$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} q(w)_n \in Q_a \quad &\Rightarrow \quad w_n = a \quad \textit{et} \\ q(w)_n \in Q_b \quad &\Rightarrow \quad w_n = b \end{aligned}$$

De plus, un mot infini sur Σ est dit prédictible *s'il existe un automate de prédiction $\mathcal{A}$ qui prédise w.*

Intuitivement, la prédiction d'un mot w par l'automate $\mathcal{A}$ signifie que lorsque l'on atteint un état de Q_a (en lisant un préfixe de w) la prochaine lettre de w que l'on va lire sera un a (et symétriquement pour b).

Définition 5 (mots univers). *Un mot infini w sur Σ est dit* univers *si tout mot fini x de Σ^* est un facteur de w.*

On se propose de montrer le résultat suivant

Proposition 1. *Un mot infini w est* prédictible *si et seulement si il n'est pas* univers.

Question 1. Montrer que dans un mot univers w, tout mot fini $x \in \Sigma^*$ apparaît un nombre infini de fois comme facteur de w et que tous ses suffixes (les suites $(w_i)_{i \geq k}$) sont également univers.

Question 2. Montrer que tout mot infini qui n'est pas univers est prédictible (on pourra considérer un plus court mot de Σ^* qui n'apparaît qu'un nombre fini de fois dans w).

On suppose maintenant que l'on a un mot w qui est prédit par un automate $\mathcal{A}$. On veut montrer que w n'est pas univers.
Question 3. Montrer que l'on peut se ramener (quitte à considérer un suffixe de w et un sous-automate de $\mathcal{A}$) à une situation où le parcours de w sur $\mathcal{A}$ passe une infinité de fois par tous les états de $\mathcal{A}$.

On suppose que l'on est dans la situation décrite dans la question précédente.
Question 4. Montrer qu'il existe un entier d tel que pour tout état q de $\mathcal{A}$, il existe un mot $x_q \in \Sigma^*$ de longueur d qui n'est jamais lu dans le parcours de w sur $\mathcal{A}$ à partir de q.
C'est-à-dire que pour tout i, si $q(w)_i = q$ alors le mot $w_i w_{i+1} \dots w_{i+d-1}$ est différent de x_q.

Question 5. En déduire qu'il existe un entier K tel que pour tout $n \geq 1$, le nombre de facteurs distincts de longueur nd dans w est inférieur à $K(2^d - 1)^n$.

Question 6. Conclure.