TD02 - Plus grand et deuxième plus grand de n entiers

Exercice 1.

Dans cet exercice, on s'intéresse à des ensembles de n entiers tous distincts rangés dans un tableau $T[1], \ldots, T[n]$. Les algorithmes considérés dans cet exercice effectuent des **affectations** et leur seul critère de décision (ou de bifurcation) est la **comparaison** de deux éléments ($=$ et $<$). En aucun cas ils ne peuvent effectuer des opérations arithmétiques, comme l'addition ou la multiplication. On s'intéresse ici à la **complexité dans le pire des cas et en nombre de comparaisons** des algorithmes.

1. Pour rechercher le plus grand et deuxième plus grand élément de n entiers, donner un algorithme naïf et sa complexité.

Pour améliorer les performances, on se propose d'envisager la solution consistant à calculer le maximum suivant le principe d'un *tournoi* (tournoi de tennis par exemple). Plaçons-nous d'abord dans le cas où il y a $n = 2^k$ nombres qui s'affrontent dans le tournoi.

2. Comment retrouve-t-on, une fois le tournoi terminé, le deuxième plus grand ?

3. Quelle est la complexité de l'algorithme ?

4. Dans le cas général, comment adapter la méthode pour traiter n quelconque ?

On se propose maintenant de montrer l'optimalité de cet algorithme en fournissant une borne inférieure sur le nombre de comparaisons à effectuer. Nous utiliserons la méthode des *arbres de décision*.

5. Montrer que tout arbre de décision qui calcule le maximum de N entiers a au moins 2^{N-1} feuilles.

6. Montrer que tout arbre binaire de hauteur h et avec f feuilles vérifie $2^h \geq f$.

7. Soit A un arbre de décision résolvant le problème du plus grand et deuxième plus grand de n entiers, minorer son nombre de feuilles. En déduire une borne inférieure sur le nombre de comparaisons à effectuer.

Exercice 2. *Matrices de Tœplitz*

Une *matrice de Tœplitz* est une matrice $n \times n$ $(a_{i,j})$ telle que $a_{i,j} = a_{i-1,j-1}$ pour $2 \leq i, j \leq n$.

1. La somme de deux matrices de Tœplitz est-elle une matrice de Tœplitz ? Et le produit ?

2. Trouver un moyen d'additionner deux matrices de Tœplitz en $\mathcal{O}(n)$.

3. Comment calculer le produit d'une matrice de Tœplitz $n \times n$ par un vecteur de longueur n ? Quelle est la complexité de l'algorithme ?