Codage des voisinages et parcours en largeur en temps $O(n)$ des graphes d'intervalles et de permutation

Christophe Crespelle[1] and Philippe Gambette[2]

[1] CNRS - Université Paris 6, christophe.crespelle@lip6.fr
[2] LIRMM, Université Montpellier 2 - CNRS, gambette@lirmm.fr

Nous nous intéressons au problème de représentation des graphes d'intervalles et des graphes de permutation par une structure de données en espace $O(n)$ qui fournit le voisinage de tout sommet de degré d en temps $O(d)$ (résumé étendu dans [1]). Cette question est fondamentale dans le contexte du stockage de grands graphes, la représentation devant être assez compacte pour pouvoir stocker le graphe en mémoire tout en préservant la complexité des algorithmes utilisant des requêtes de voisinage.

Dans cet objectif, une approche naturelle consiste à étendre des résultats existant sur des sous-classes ayant de bonnes propriétés vis à vis de l'encodage des voisinages. En particulier, les graphes d'intervalles unitaires, qui admettent un modèle intervallaire où tous les intervalles ont même longueur, peuvent aussi être définis de la manière suivante. Ce sont les graphes dont les sommets peuvent être ordonnées de telle sorte que les voisinages fermés (c'est à dire contenant les voisins mais aussi le sommet lui-même) apparaissent comme des intervalles dans cet ordre [4].

Nous considérons donc le paramètre de *contiguïté fermée* qui indique l'entier k minimum tel qu'il existe un ordre des sommets où le voisinage fermé de chaque sommet du graphe apparaît comme une union d'au plus k intervalles. Déterminer si un graphe a contiguïté fermée k est NP-complet pour tout $k \geq 2$ fixé [3,5]. Nous proposons également un paramètre de *linéarité fermée* qui correspond au nombre minimum d'ordres sur les sommets tel que le voisinage fermé apparaît comme une union d'intervalles, en choisissant exactement un intervalle dans chacun de ces ordres. Ces deux paramètres permettraient de résoudre le problème s'ils étaient bornés pour ces deux classes. Toutefois, de façon inattendue, nous exhibons une famille de graphes d'intervalles et de permutation qui montrent qu'ils ne le sont pas : ces graphes ont une contiguïté en $\Omega(\log n)$ et une linéarité en $\Omega(\log n / \log \log n)$.

Nous proposons alors une autre approche pour le problème d'encodage des graphes d'intervalles et des graphes de permutation, basée sur l'utilisation des arbres cartésiens augmentés [2], qui permet de résoudre le problème avec les complexités voulues. Ce résultat nous incite à penser que la gestion efficace des voisinages dans les graphes d'intervalles ou de permutation pourrait conduire à de nouveaux algorithmes sur ces deux classes, permettant d'améliorer ou de simplifier certains résultats existants.

Nous illustrons cette perspective en montrant comment implémenter un algorithme de recherche en largeur en temps $O(n)$ prenant en entrée le modèle d'intersection d'un graphe d'intervalles ou de permutation et un ordre de priorité sur les sommets. Ceci abaisse la complexité du problème All Pair Shortest Paths à $O(n^2)$ et du Single Source Shortest Paths à $O(n)$ sur ces deux classes de graphes.

Références

1. C. Crespelle and P. Gambette. Efficient neighbourhood encoding for interval graphs and permutation graphs and $O(n)$ breadth-first search. In *IWOCA'09*, LNCS, pages 146–157, 2009.
2. H.N. Gabow, J.L. Bentley, and R.E. Tarjan. Scaling and related techniques for geometry problems. In *STOC'84*, pages 135–143, 1984.
3. P.W. Goldberg, M.C. Golumbic, H. Kaplan, and R. Shamir. Four strikes against physical mapping of DNA. *Journal of Computational Biology*, 2(1) :139–152, 1995.
4. F.S. Roberts. *Representations of Indifference Relations*. PhD thesis, Stanford University, 1968.
5. R. Wang, F.C.M. Lau, and Y. Zhao. Hamiltonicity of regular graphs and blocks of consecutive ones in symmetric matrices. *Discr. Appl. Math.*, 155(17) :2312–2320, 2007.