

Coloration d'arêtes à distance 2

Hervé Hocquard

Pascal Ochem
Petru Valicov

André Raspaud

Université de Bordeaux, France

LIRMM

1^{er} Mars 2012

k -coloration forte d'arêtes

Une *k -coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.



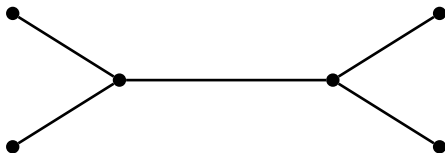
J.L. Fouquet et J.L. Jolivet.

Strong edge-coloring of cubic planar graphs.

Progress in Graph Theory, pages 247-264, 1984.

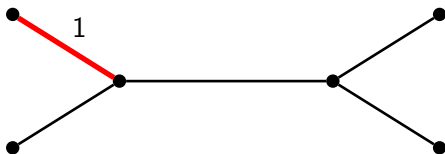
k -coloration forte d'arêtes

Une *k -coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.



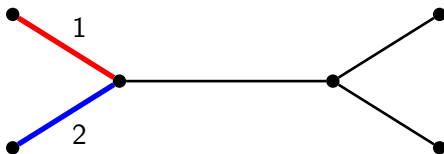
k -coloration forte d'arêtes

Une *k -coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.



k -coloration forte d'arêtes

Une *k -coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.



k -coloration forte d'arêtes

Une *k -coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.



k -coloration forte d'arêtes

Une *k -coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.



k -coloration forte d'arêtes

Une *k -coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.



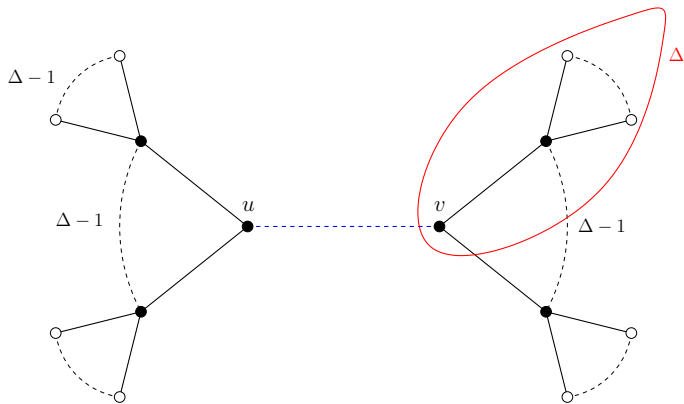
k -coloration forte d'arêtes

Une *k -coloration forte d'arêtes* d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes.

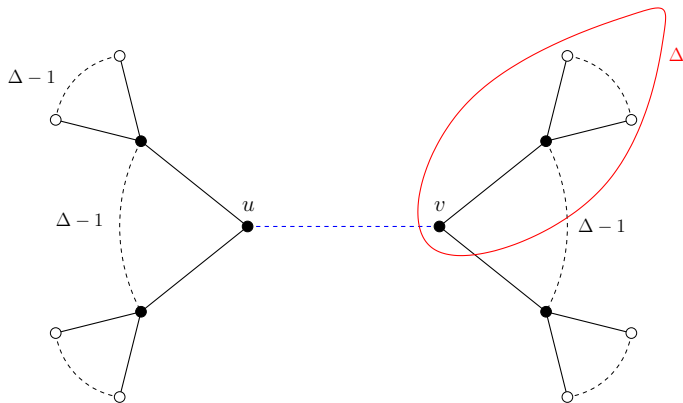
L'*indice chromatique fort* de G , $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k tel que G admette une k -coloration forte d'arêtes.



Algorithme glouton



Algorithme glouton



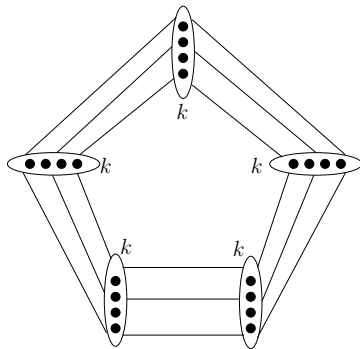
$$\chi'_s(G) \leq 2\Delta(\Delta - 1) + 1$$

Conjecture [Erdős, Nešetřil '85]

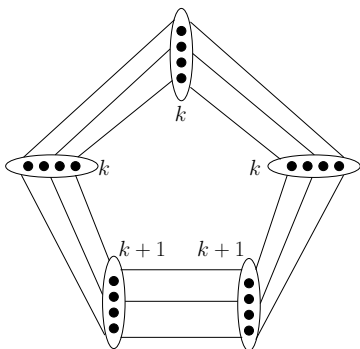
$\chi'_s(G) \leq \frac{5}{4}\Delta^2$ si Δ est pair et $\chi'_s(G) \leq \frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta + 1)$ si Δ est impair.

Conjecture [Erdős, Nešetřil '85]

$\chi'_s(G) \leq \frac{5}{4}\Delta^2$ si Δ est pair et $\chi'_s(G) \leq \frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta + 1)$ si Δ est impair.



$$\Delta = 2k, \chi'_s = 5k^2$$



$$\Delta = 2k + 1, \chi'_s = 5k^2 + 4k + 1$$

Rappel

- Algorithme glouton : $\chi'_s(G) \simeq 2\Delta^2$.
- Conjecture d'Erdős et Nešetřil : $\chi'_s(G) \simeq \frac{5}{4}\Delta^2$.

Rappel

- Algorithme glouton : $\chi'_s(G) \simeq 2\Delta^2$.
- Conjecture d'Erdős et Nešetřil : $\chi'_s(G) \simeq \frac{5}{4}\Delta^2$.

Théorème [M. Molloy, B. Reed '97]

Si G est un graphe de degré maximum Δ , alors $\chi'_s(G) \leq 1,998\Delta^2$ (pour Δ suffisamment grand).

Théorème [Andersen, Horák *et al.* '92]

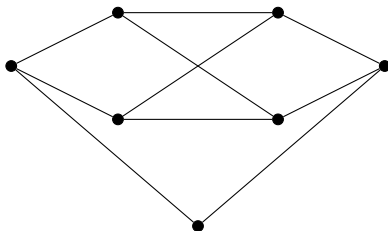
Si G est un graphe subcubique, alors $\chi'_s(G) \leq 10$.

Résultat optimal

Théorème [Andersen, Horák *et al.* '92]

Si G est un graphe subcubique, alors $\chi'_s(G) \leq 10$.

Résultat optimal



$$\chi'_s(G) = 10$$

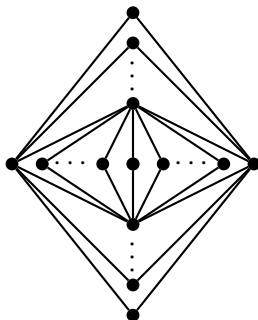
Théorème [Cranston '06]

Si G est un graphe de degré maximum 4, alors $\chi'_s(G) \leq 22$.

Conjecture d'Erdős et Nešetřil : $\chi'_s(G) \leq 20$.

Théorème [Faudree *et al.* '90]

Si G est un graphe planaire de degré maximum Δ , alors $\chi'_s(G) \leq 4\Delta + 4$.
De plus, pour tout $\Delta \geq 2$, on peut construire un graphe G tel que $\chi'_s(G) = 4\Delta - 4$.



$$\chi'_s(G) = 4\Delta - 4$$

- Les arbres (Faudree *et al.* '90).

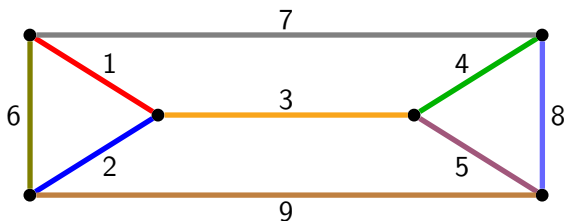
- Les arbres (Faudree *et al.* '90).
- Les graphes bipartis de degré maximum au plus 3 ($\chi'_s(G) \leq 9$, Steger et Yu '93).

- Les arbres (Faudree *et al.* '90).
- Les graphes bipartis de degré maximum au plus 3 ($\chi'_s(G) \leq 9$, Steger et Yu '93).
- Les graphes de Kneser (Faudree *et al.* '90).

- Les arbres (Faudree *et al.* '90).
- Les graphes bipartis de degré maximum au plus 3 ($\chi'_s(G) \leq 9$, Steger et Yu '93).
- Les graphes de Kneser (Faudree *et al.* '90).
- Les produits de graphes (O. Togni '04).

Conjecture [Faudree *et al.* '90]

Si G est un graphe planaire subcubique, alors $\chi'_s(G) \leq 9$.



Définition

Le *degré moyen maximum* d'un graphe G , noté $\text{mad}(G)$, est le maximum des degrés moyens de tous les sous-graphes de G :

$$\text{mad}(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G \right\}$$

Théorème

Soit G un graphe subcubique :

- 1 Si $\text{mad}(G) < \frac{15}{7}$, alors $\chi'_s(G) \leq 6$.
- 2 Si $\text{mad}(G) < \frac{27}{11}$, alors $\chi'_s(G) \leq 7$.
- 3 Si $\text{mad}(G) < \frac{13}{5}$, alors $\chi'_s(G) \leq 8$.
- 4 Si $\text{mad}(G) < \frac{36}{13}$, alors $\chi'_s(G) \leq 9$.

Lemme

Tout graphe planaire de maille au moins g vérifie :

$$\text{mad}(G) < \frac{2g}{g-2}$$

Lemme

Tout graphe planaire de maille au moins g vérifie :

$$\text{mad}(G) < \frac{2g}{g-2}$$

Corollaire

Soit G un graphe planaire subcubique de maille g :

- 1 Si $g \geq 30$, alors $\chi'_s(G) \leq 6$.
- 2 Si $g \geq 11$, alors $\chi'_s(G) \leq 7$.
- 3 Si $g \geq 9$, alors $\chi'_s(G) \leq 8$.
- 4 Si $g \geq 8$, alors $\chi'_s(G) \leq 9$.

Lemme

Tout graphe planaire de maille au moins g vérifie :

$$\text{mad}(G) < \frac{2g}{g-2}$$

Corollaire

Soit G un graphe planaire subcubique de maille g :

- 1 Si $g \geq 16$, alors $\chi'_s(G) \leq 6$.
- 2 Si $g \geq 11$, alors $\chi'_s(G) \leq 7$.
- 3 Si $g \geq 9$, alors $\chi'_s(G) \leq 8$.
- 4 Si $g \geq 8$, alors $\chi'_s(G) \leq 9$.

Supposons que H est un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.

1. Propriétés structurelles de H .
2. Procédure de déchargement.
 - 2.1 Une fonction poids ω telle que $\sum_x \omega(x) < 0$.
 - 2.2 Règles de déchargement.
 - 2.3 Création d'une nouvelle fonction poids ω^* telle que $\sum_x \omega(x) = \sum_x \omega^*(x)$.
3. En utilisant les hypothèses faites sur le mad et les propriétés structurelles de H , nous aboutissons à une contradiction,
 $0 \leq \sum_x \omega^*(x) = \sum_x \omega(x) < 0$.

Donc aucun contre-exemple n'existe.

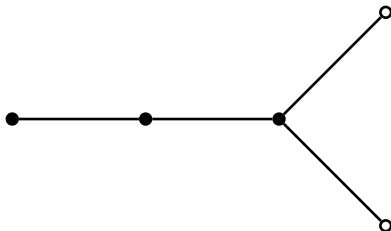
Configurations réductibles : $\chi'_s(G) \leq 6$

Soit H un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.

Alors H ne possède pas de :

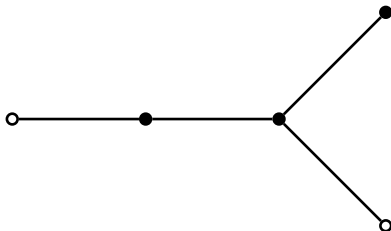
Configurations réductibles : $\chi'_s(G) \leq 6$

Soit H un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.
Alors H ne possède pas de :



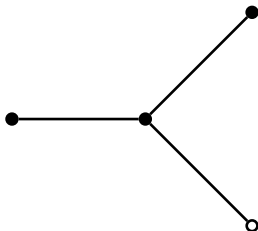
(C1) 1-sommet adjacent à un 2-sommet

Soit H un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.
Alors H ne possède pas de :



(C2) 3-sommet adjacent à un 1-sommet et à un 2-sommet

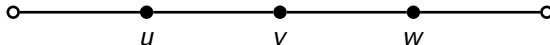
Soit H un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.
Alors H ne possède pas de :



(C3) 3-sommet adjacent à deux 1-sommets

Configurations réductibles : $\chi'_s(G) \leq 6$

Soit H un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.
Alors H ne possède pas de :

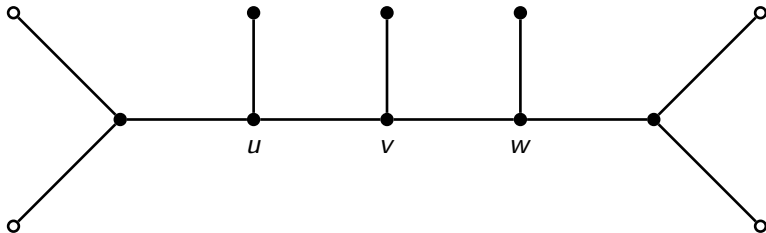


(C4) une chaîne uvw telle que u , v et w sont des 2-sommets

Configurations réductibles : $\chi'_s(G) \leq 6$

Soit H un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.

Alors H ne possède pas de :

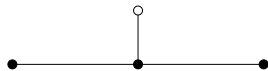


(C5) une chaîne uvw telle que u , v et w sont des 3-sommets adjacents à des 1-sommets

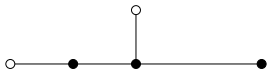
Ensemble des configurations réductibles : $\chi'_s(G) \leq 6$



(C1)



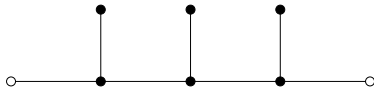
(C3)



(C2)

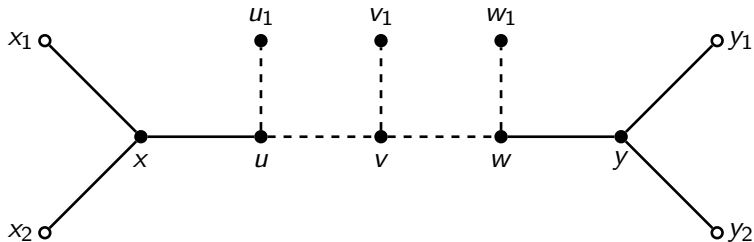


(C4)

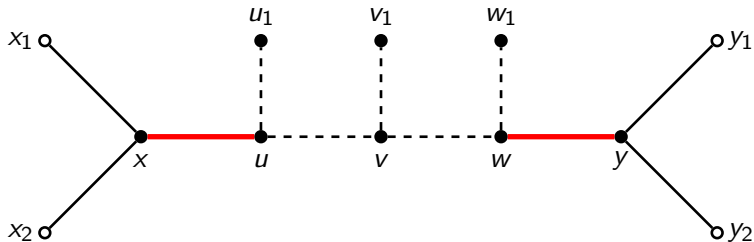


(C5)

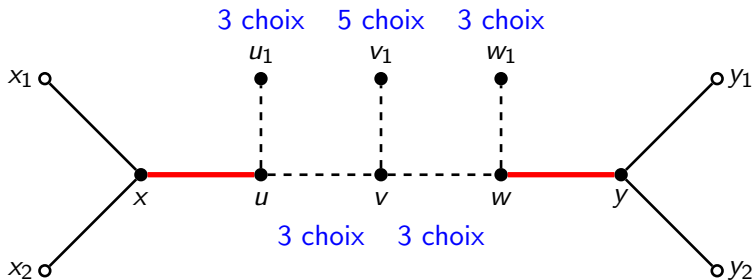
Preuve de la configuration réductible (C5)



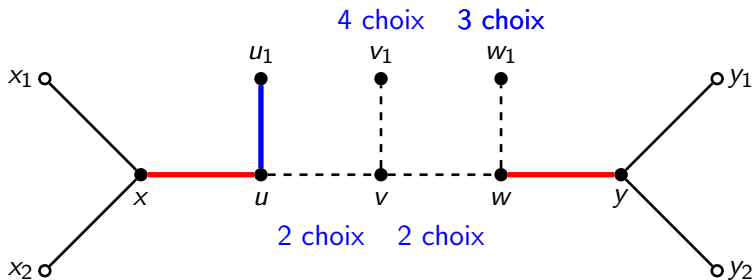
Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



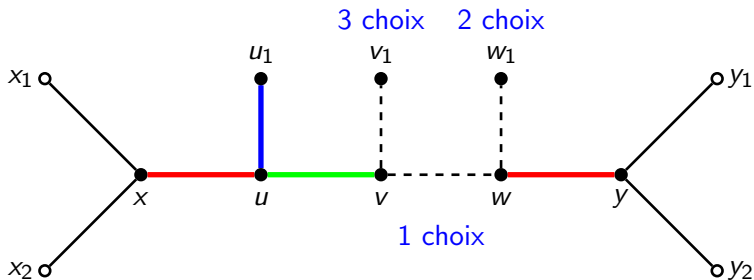
Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



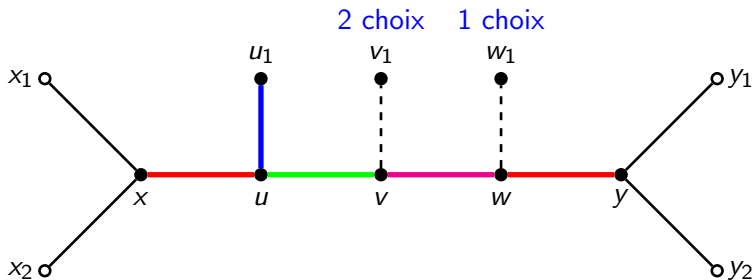
Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



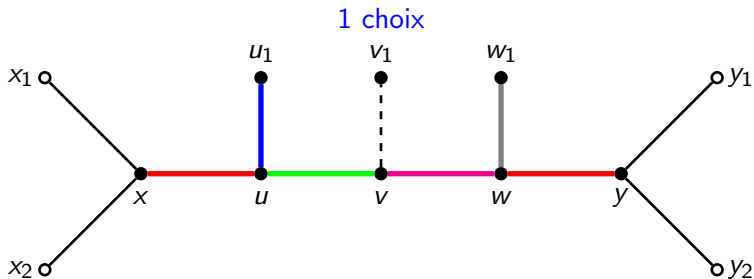
Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



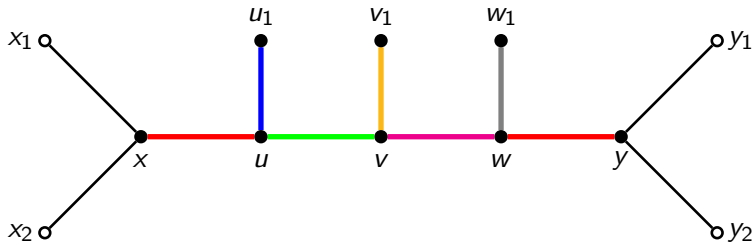
Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



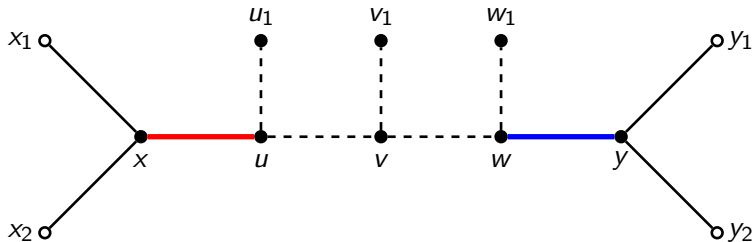
Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



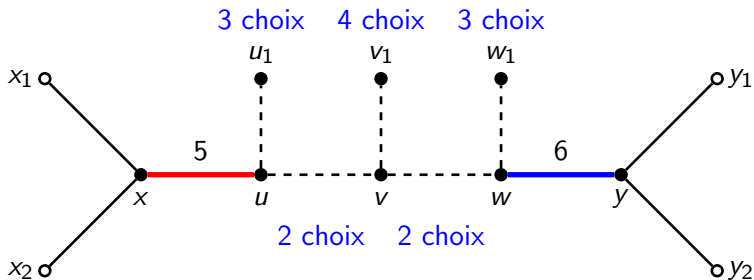
Premier cas : $c(xu) = c(wy)$



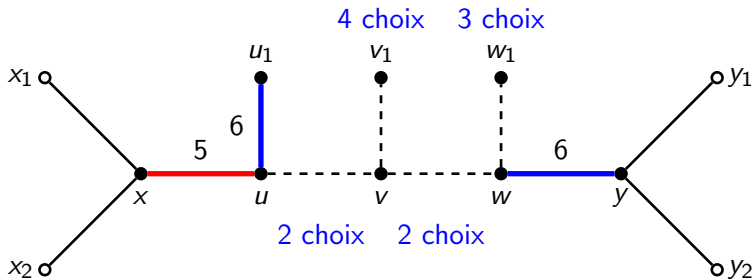
Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



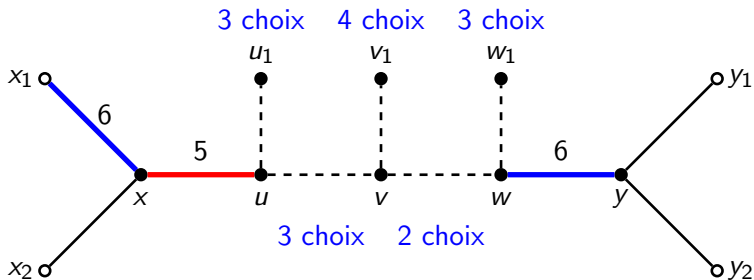
Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



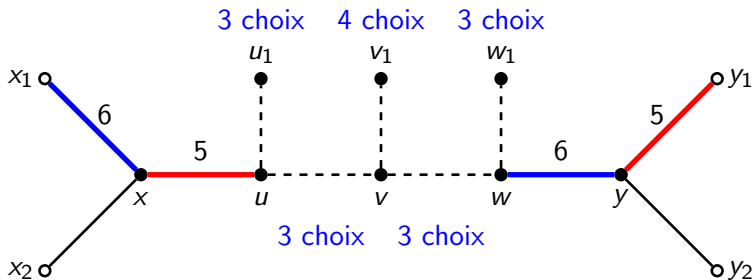
Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



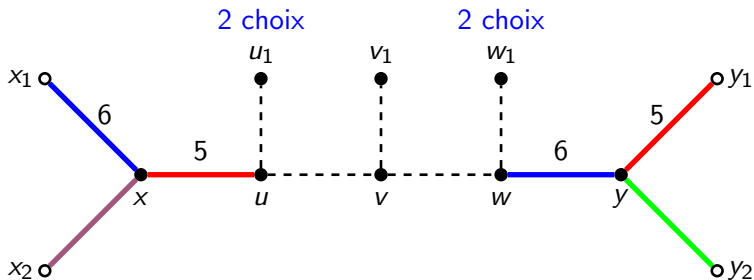
Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



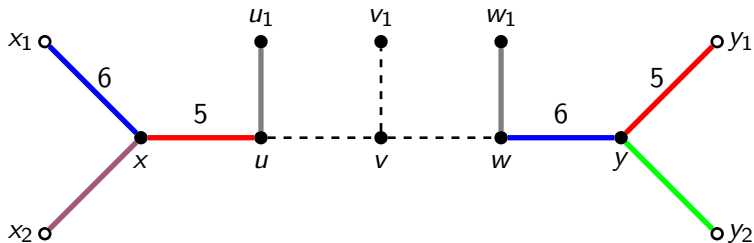
Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



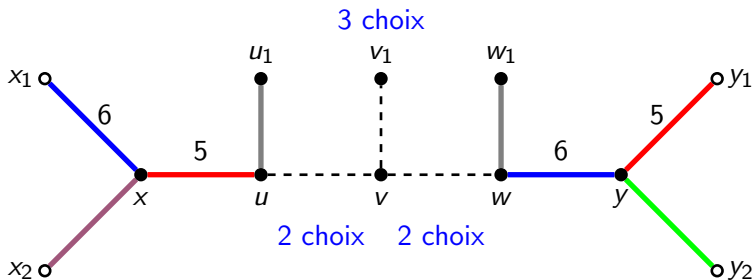
Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



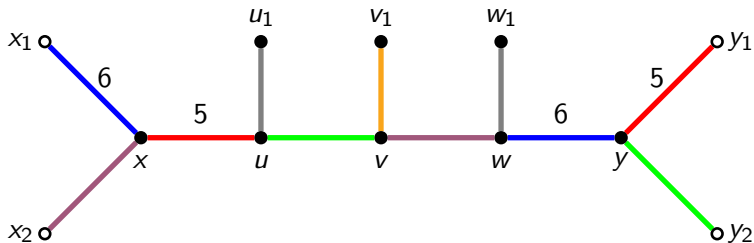
Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



Second cas : $c(xu) \neq c(wy)$



Procédure de déchargement

Nous définissons une fonction poids $\omega : V(H) \rightarrow \mathbb{R}$ par
 $\omega(x) = d(x) - \frac{15}{7}$.

$$\omega(1V) = -\frac{8}{7}, \quad \omega(2V) = -\frac{1}{7}, \quad \omega(3V) = \frac{6}{7}$$

Procédure de déchargement

Nous définissons une fonction poids $\omega : V(H) \rightarrow \mathbb{R}$ par
 $\omega(x) = d(x) - \frac{15}{7}$.

$$\omega(1V) = -\frac{8}{7}, \quad \omega(2V) = -\frac{1}{7}, \quad \omega(3V) = \frac{6}{7}$$

- 1 Chaque 3-sommet fort (*i.e.* qui n'est pas adjacent à un 1-sommet) donne $\frac{2}{7}$ à chaque 3-sommet faible adjacent et $\frac{1}{7}$ à chaque 2-sommet adjacent.
- 2 Chaque 3-sommet faible donne $\frac{8}{7}$ à son unique 1-sommet adjacent.

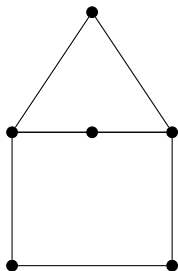
Lorsque la procédure de déchargement est terminée, nous avons montré que :

- 1 La somme totale des poids est inchangée.
- 2 Pour tout $x \in V(H)$, $\omega^*(x) \geq 0$.

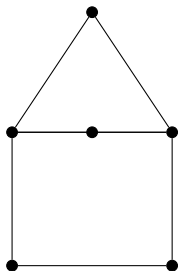
D'où,

$$0 \leq \sum_{x \in V(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H)} \omega(x) < 0$$

donc aucun contre-exemple ne peut exister.

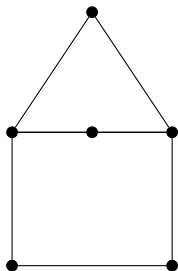


Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{7}{3}$ et $\chi'_s(G) > 6$.



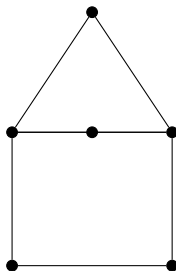
Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{7}{3}$ et $\chi'_s(G) > 6$.

Si $\text{mad}(G) < \frac{15}{7}$ alors $\chi'_s(G) \leq 6$.



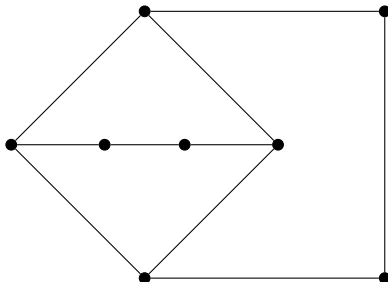
Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{7}{3}$ et $\chi'_s(G) > 6$.

Si $\text{mad}(G) < \frac{15}{7}$ alors $\chi'_s(G) \leq 6$.

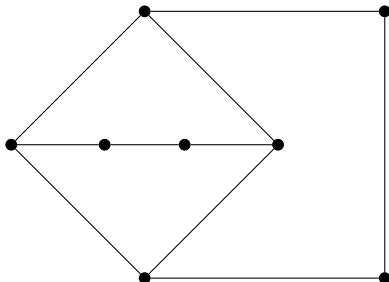


Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{7}{3}$ et $\chi'_s(G) > 6$.

Si $\text{mad}(G) < \frac{7}{3}$ alors $\chi'_s(G) \leq 6$.

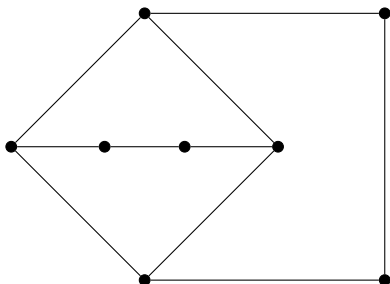


Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{5}{2}$ et $\chi'_s(G) > 7$.



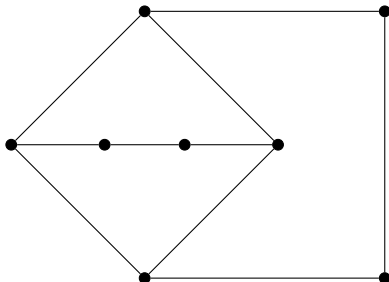
Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{5}{2}$ et $\chi'_s(G) > 7$.

Si $\text{mad}(G) < \frac{27}{11}$ alors $\chi'_s(G) \leq 7$.



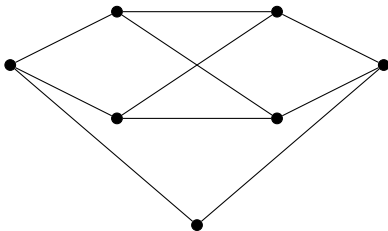
Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{5}{2}$ et $\chi'_s(G) > 7$.

Si $\text{mad}(G) < \frac{27}{11}$ alors $\chi'_s(G) \leq 7$.

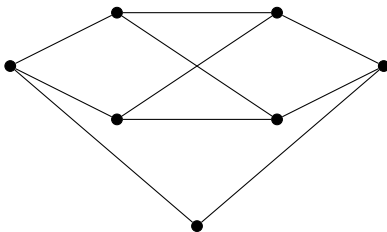


Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{5}{2}$ et $\chi'_s(G) > 7$.

Si $\text{mad}(G) < \frac{5}{2}$ alors $\chi'_s(G) \leq 7$.

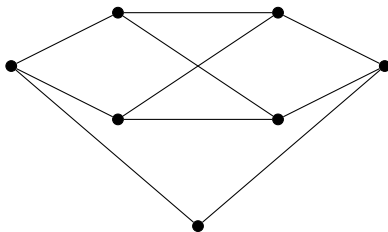


Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{20}{7}$ et $\chi'_s(G) > 9$.



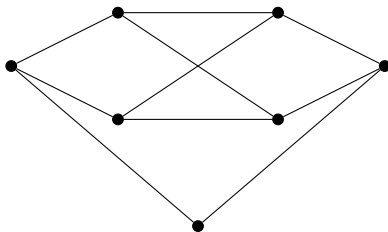
Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{20}{7}$ et $\chi'_s(G) > 9$.

Si $\text{mad}(G) < \frac{36}{13}$ alors $\chi'_s(G) \leq 9$.



Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{20}{7}$ et $\chi'_s(G) > 9$.

Si $\text{mad}(G) < \frac{36}{13}$ alors $\chi'_s(G) \leq 9$.



Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{20}{7}$ et $\chi'_s(G) > 9$.

Si $\text{mad}(G) < \frac{20}{7}$ alors $\chi'_s(G) \leq 9$.

Soit $f(n) = \inf\{\text{mad}(G) \mid \chi'_s(G) > n\}$.

$$f(6) = \frac{7}{3}$$

$$f(7) = \frac{5}{2}$$

$$\frac{56}{21} = \frac{8}{3} < f(8) \leq \frac{20}{7} = \frac{60}{21}$$

$$f(9) = \frac{20}{7}$$

Théorème

Si G est un graphe planaire subcubique sans C_4 ni C_5 alors $\chi'_s(G) \leq 9$.

Théorème

Si G est un graphe planaire subcubique sans C_4 ni C_5 alors $\chi'_5(G) \leq 9$.

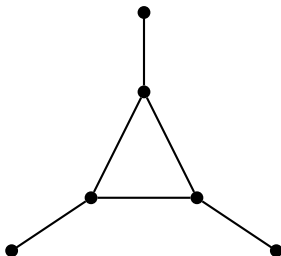
Idée de la preuve

Soit H un contre-exemple d'ordre minimum au théorème.

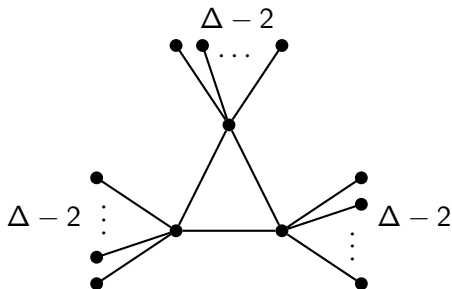
Alors H ne possède pas de :

- (C1) triangle,
- (C2) 1⁻-sommets,
- (C3) deux 2-sommets adjacents,
- (C4) 3-sommets adjacents à deux 2-sommets,
- (C5) deux 3₁-sommets adjacents,
- (C6) 2-sommets adjacents à un cycle de taille 6.

Les graphes planaires extérieurs

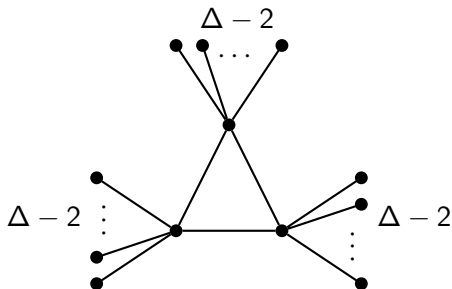


Les graphes planaires extérieurs



Théorème

Si G est un graphe planaire extérieur de degré maximum Δ alors $\chi'_s(G) \leq 3\Delta - 3$.



k -COLORATION forte d'arêtes (k -SEC)

INSTANCE : Un graphe G .

QUESTION : Est-ce que G admet une coloration forte d'arêtes avec k couleurs ?

- Polynomial pour les graphes triangulés (Cameron, 1989)

- Polynomial pour les graphes triangulés (Cameron, 1989)
- NP-complet pour les graphes bipartis de maille g quelconque fixée et pour tout $k \geq 4$ (Mahdian, 2002)

- Polynomial pour les graphes triangulés (Cameron, 1989)
- NP-complet pour les graphes bipartis de maille g quelconque fixée et pour tout $k \geq 4$ (Mahdian, 2002)
- NP-complet pour les graphes bipartis de degré maximum 3, $k = 5$, de maille 6 (Erickson *et al.*, 2002)

- Polynomial pour les graphes triangulés (Cameron, 1989)
- NP-complet pour les graphes bipartis de maille g quelconque fixée et pour tout $k \geq 4$ (Mahdian, 2002)
- NP-complet pour les graphes bipartis de degré maximum 3, $k = 5$, de maille 6 (Erickson *et al.*, 2002)

Question

Et pour la famille des graphes planaires ?

Théorème

4-SEC est NP-complet pour les graphes subcubiques planaires, bipartis, pour toute maille g fixée.

Théorème

5-SEC est NP-complet pour les graphes subcubiques planaires, bipartis, de maille 8 et pour les graphes subcubiques planaires de maille 9.

Théorème

6-SEC est NP-complet pour les graphes subcubiques planaires, bipartis, de maille 4.

Théorème

6-SEC est NP-complet pour les graphes subcubiques planaires, bipartis, de maille 4.

Preuve

Réduction depuis le problème de 3-COLORATION des graphes planaires de degré 4 ($3\text{-COL} \leq_P 6\text{-SEC}$).



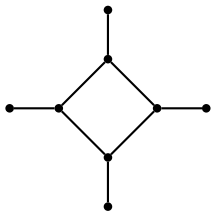
M.R. Garey, D.S. Johnson et L.J. Stockmeyer.

Some simplified NP-Complete graph problems.

Theoretical Computer Science, (1) :237-267, 1976.

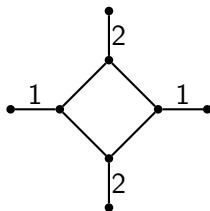
Théorème

6-SEC est NP-complet pour les graphes subcubiques planaires bipartis (maille 4).



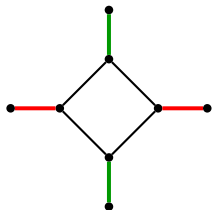
Théorème

6-SEC est NP-complet pour les graphes subcubiques planaires bipartis (maille 4).



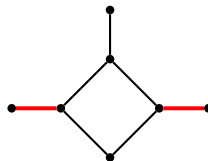
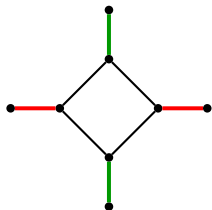
Théorème

6-SEC est NP-complet pour les graphes subcubiques planaires bipartis (maille 4).



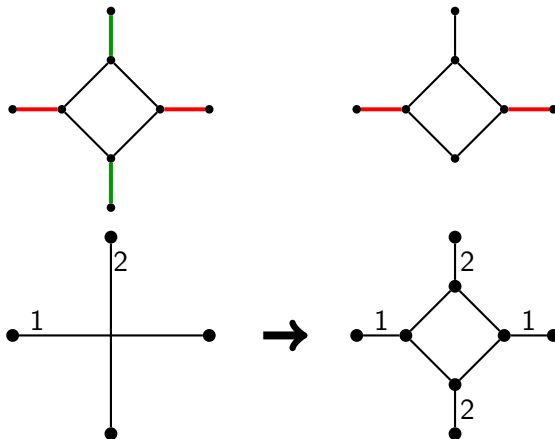
Théorème

6-SEC est NP-complet pour les graphes subcubiques planaires bipartis (maille 4).

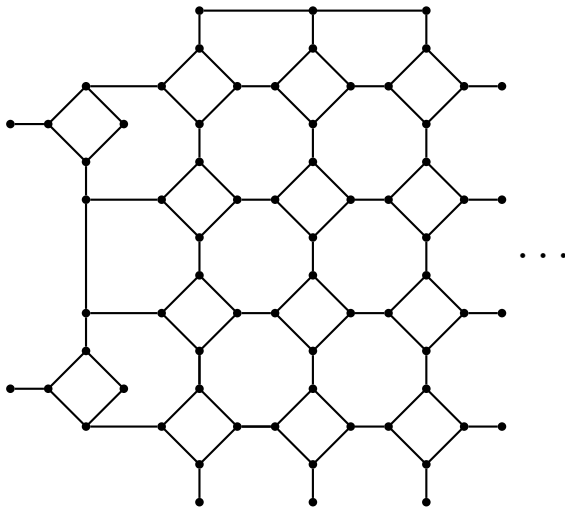


Théorème

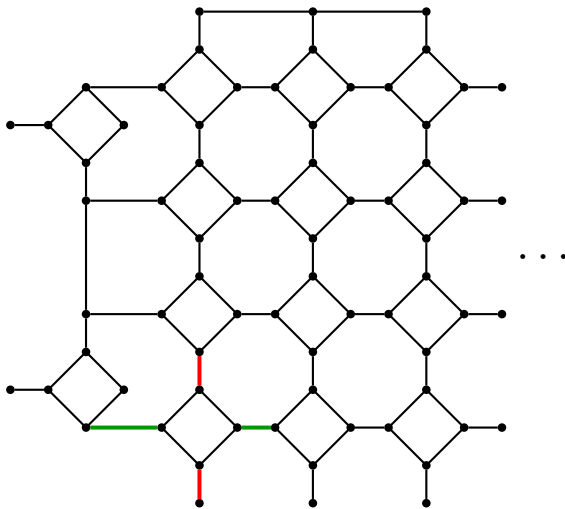
6-SEC est NP-complet pour les graphes subcubiques planaires bipartis (maille 4).



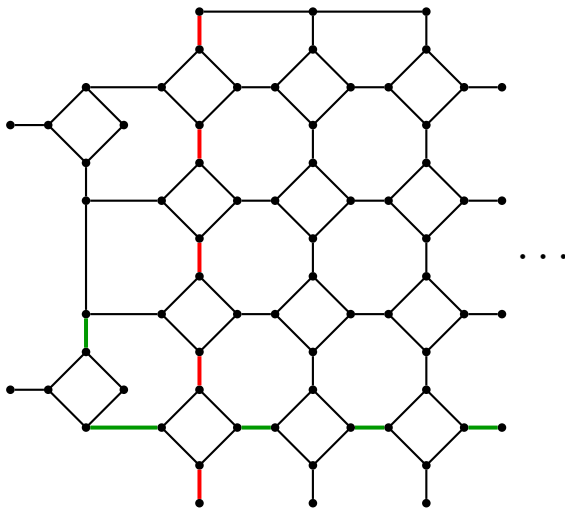
Graphe M



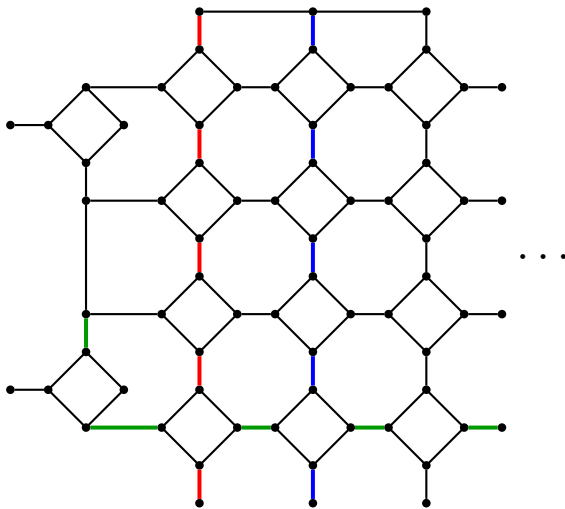
Graphe M



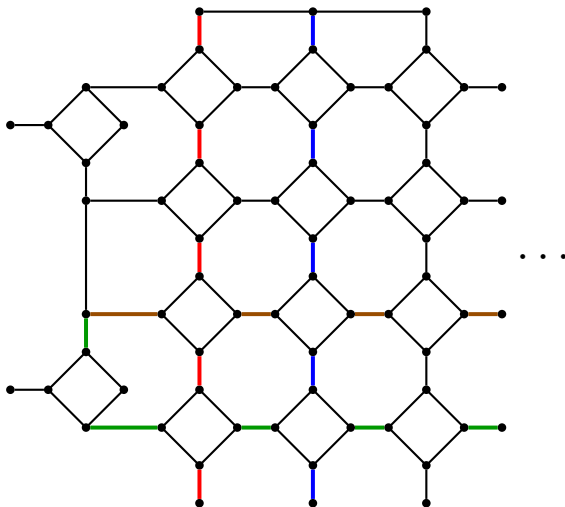
Graphe M



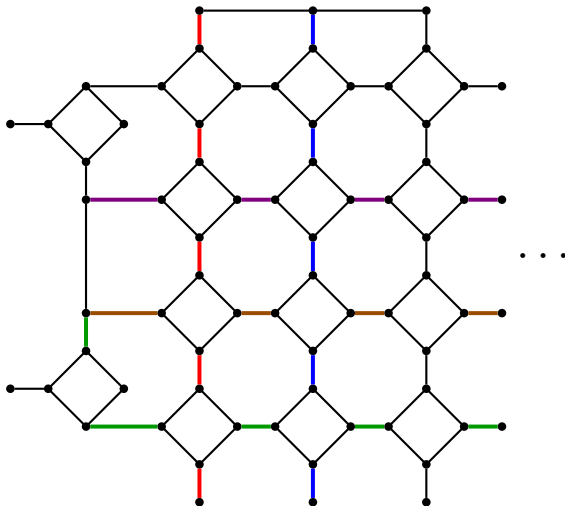
Graphe M



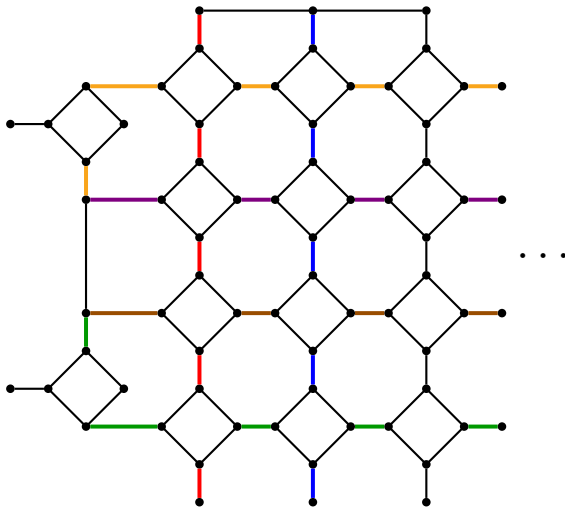
Graphe M



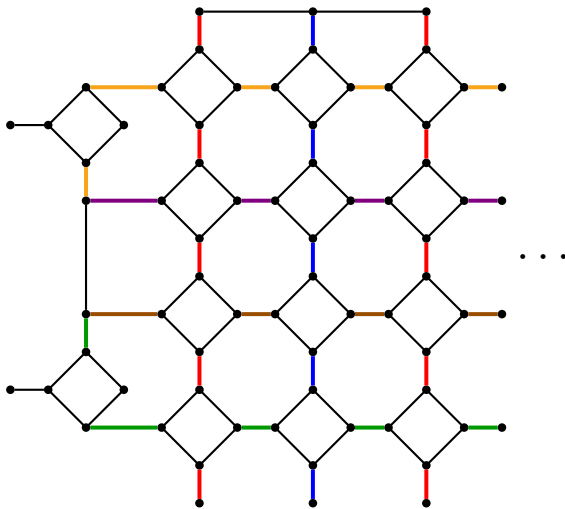
Graphe M



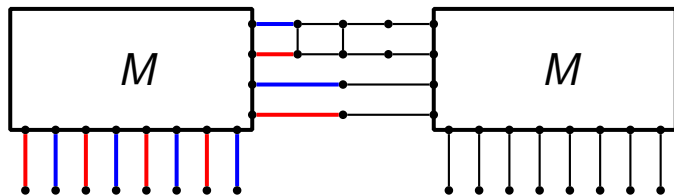
Graphe M



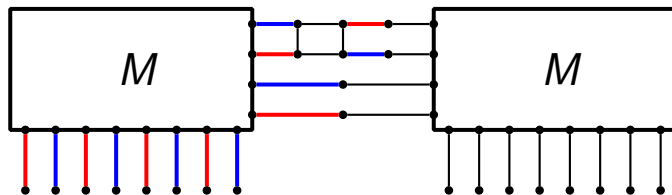
Graphe M



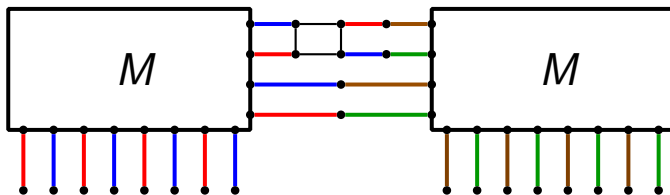
Gadget de sommet



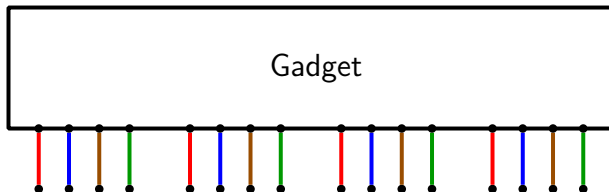
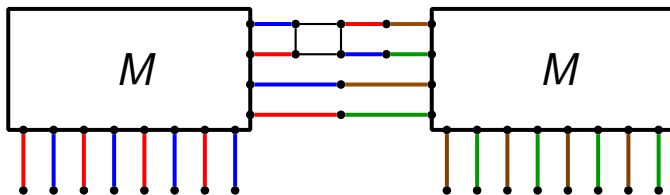
Gadget de sommet



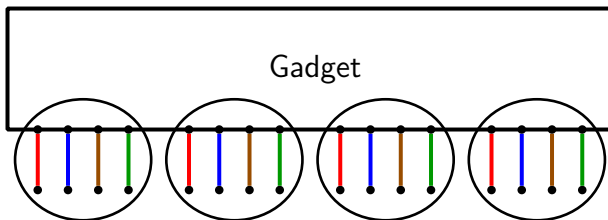
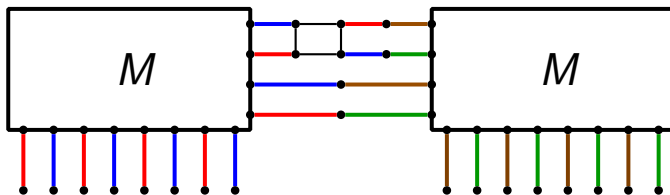
Gadget de sommet



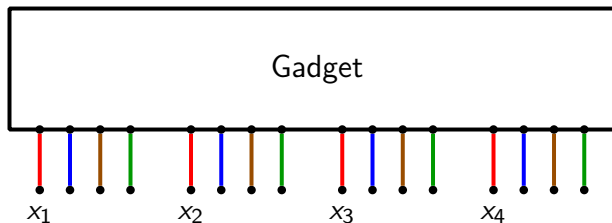
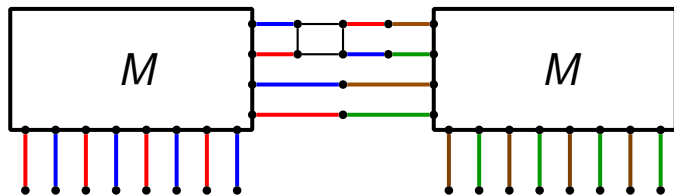
Gadget de sommet



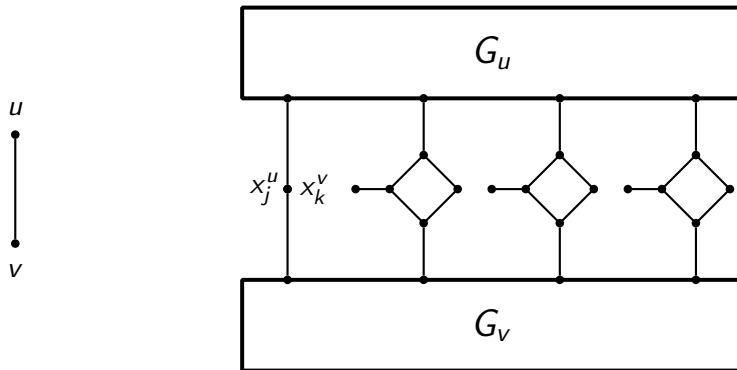
Gadget de sommet



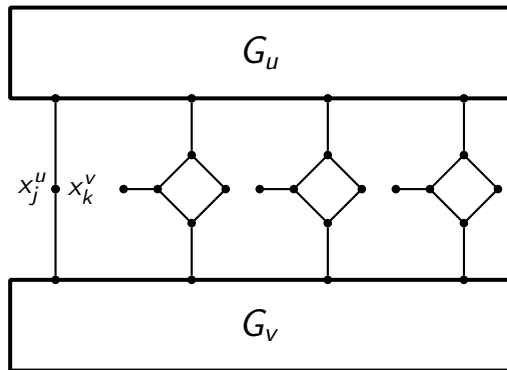
Gadget de sommet



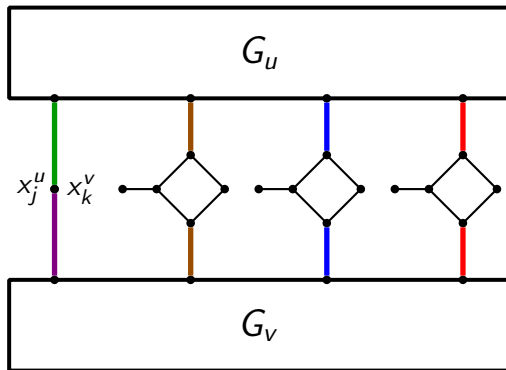
Gadget d'arête



Gadget d'arête



Gadget d'arête



- 1 Démontrer la conjecture de Faudree.
- 2 Question d'optimalité liée à la majoration $\frac{8}{3}$.
- 3 Trouver un graphe G tel que $\text{mad}(G) = \frac{8}{3}$ et $\chi'_s(G) > 8$.

MERCI