Multiflots Entiers et Chemins Disjoints

Guyslain Naves

LIRMM, 4 juin 2009

G-SCOP, Grenoble

Première Partie

Introduction

Instance :

(G, s, t, c)
avec :

- G graphe (orienté en général),
- $s, t \in V(G)$ *source* et *destination* du flot,
- $c : E(G) \to \mathbb{N}$ capacité du graphe.

On définit $\mathcal{P} := \{(s, t)\text{-chemins de } G\}$

Instance :

(G, s, t, c)
Problème : maximiser $\sum_{P \in \mathcal{P}} x_P$, pour $x \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{P}}$ avec :

$$\sum_{P \ni e, P \in \mathcal{P}} x_P \leq c_e \quad (\forall e \in E(G))$$

Instance :

(G, s, t, c)
Problème : maximiser $\sum_{P \in \mathcal{P}} x_P$, pour $x \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{P}}$ avec :

$$f_e = \sum_{P \ni e, P \in \mathcal{P}} x_P \leq c_e \quad (\forall e \in E(G))$$

Lois de Kirchhoff

Notons : $\mathrm{ex}_{G,f}(v) = \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e$

Formulation sur les arêtes : Maximiser $\mathrm{ex}_{G,f}(s)$ avec :

$$\begin{aligned} \mathrm{ex}_{G,v}(f) &= 0 \quad (\forall v \in V(G) \setminus \{s,t\}) \\ 0 \leq f &\leq c \end{aligned}$$

Lois de Kirchhoff

Notons : $\mathrm{ex}_{G,f}(v) = \sum_{e\in\delta^+(v)} f_e - \sum_{e\in\delta^-(v)} f_e$

Pour la symétrie, soit $H = (V(G), \{h = (t,s)\})$ *graphe de demande* :

$$\max f_h \quad \text{avec} \begin{cases} \mathrm{ex}_{G+H,f}(v) = 0 \ (\forall v \in V(G+H)) \\ 0 \leq f \leq c \end{cases}$$

Lois de Kirchhoff

Notons : $\mathrm{ex}_{G,f}(v) = \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e$

Pour la symétrie, soit $H = (V(G), \{h = (t,s)\})$ *graphe de demande* :

$$\max f_h \quad \text{avec} \begin{cases} \mathrm{ex}_{G+H,f}(v) = 0 \ (\forall v \in V(G+H)) \\ 0 \leq f \leq c \end{cases}$$

Conséquences : Polynomialité, Unimodularité, Intégralité

Max Flot - Min Coupe

(s,t)-*Coupe* C : $C = \delta^+(U)$, avec U tel que :

- U contient s,
- et U ne contient pas t.

Théorème (Menger 1927, Ford et Fulkerson 1956)

La valeur maximum d'un (s,t)-flot est égal à la capacité minimum $c(F)$ d'une (s,t)-coupe $F \subset E(G)$

Flots multi-commodités

Graphe de demande H quelconque, $V(G) = V(H)$.

Soit $\mathcal{C}$ ensemble des cycles de $G + H$ intersectant $E(H)$ exactement une fois.

Instance : $(G, H, c : E(G) \to \mathbb{N})$
Problème :

$$\sum_{C \ni e, C \in \mathcal{C}} x_C \leq c_e \quad (\forall e \in E(G))$$

Flots multi-commodités

Graphe de demande H quelconque, $V(G) = V(H)$.

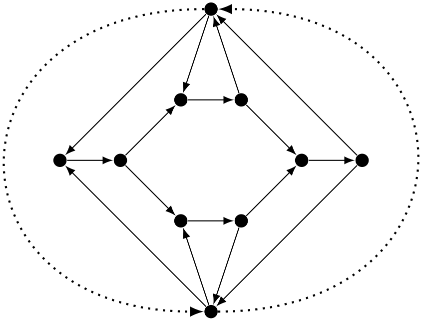
Soit $\mathcal{C}$ ensemble des cycles de $G + H$ intersectant $E(H)$ exactement une fois.

Instance : $(G, H, r : E(H) \to \mathbb{N}, c : E(G) \to \mathbb{N})$
Problème : Existe-t-il $x \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$ tel que :

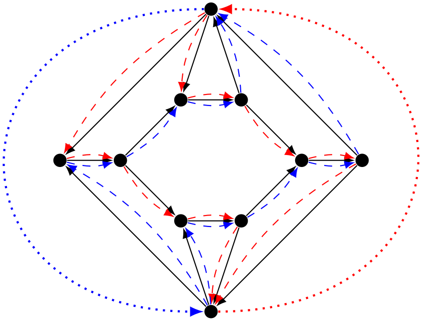
$$\sum_{C \ni e, C \in \mathcal{C}} x_C \leq c_e \quad (\forall e \in E(G))$$

$$\sum_{C \ni h, C \in \mathcal{C}} x_C = r_h \quad (\forall h \in E(H))$$

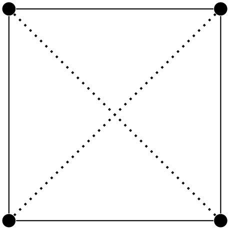
Multiflots non-entiers



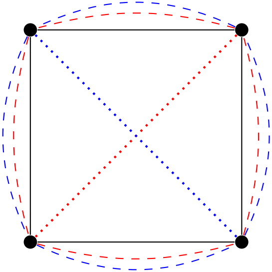
Multiflots non-entiers



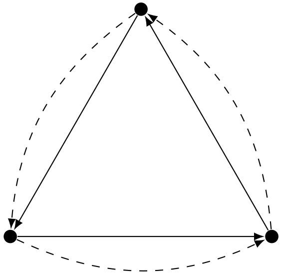
Multiflots non-entiers



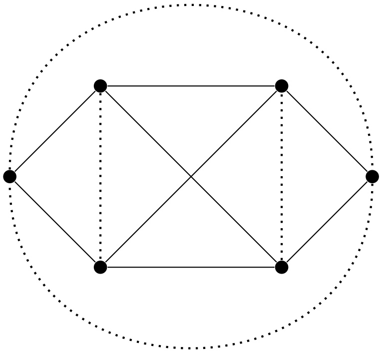
Multiflots non-entiers



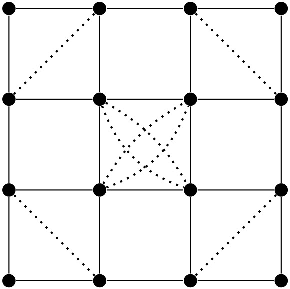
Multiflots non-entiers



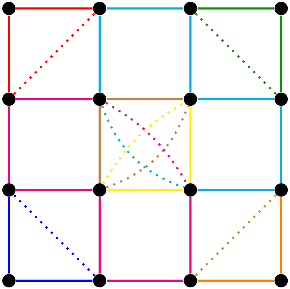
Multiflots non-entiers



Multiflots non-entiers



Multiflots non-entiers



Théorème Japonais (I)

Version fractionnaire des flots :

Primal :

$\max \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P$
$\sum_{P \ni e} x_P \leq c_e \quad (\forall e \in E(G))$
$x \geq 0$

Dual :

$\min \sum_{e \in E(G)} c_e y_e$
$\sum_{e \in P} y_e \geq 1 \quad (\forall P \in \mathcal{P})$
$y \geq 0$

Théorème

Il existe un flot de taille k ssi il n'existe pas $y : E(G) \to \mathbb{R}_+$ tel que $k.\lambda_y(s,t) > \sum_{e \in E(G)} y_e c_e$

Théorème Japonais (II)

De même :

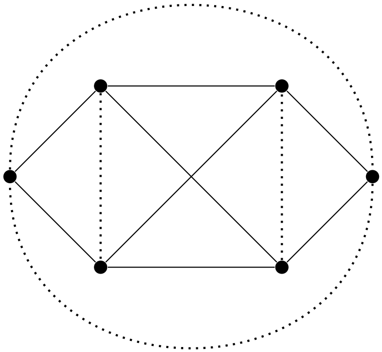
Théorème (Onaga, Kakusho 1971)

(G, H, r, c) possède une solution fractionnaire ssi il n'existe pas $y : E(G) \to \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\sum_{st \in E(H)} r(st)\lambda_y(s,t) > \sum_{e \in E(G)} y_e c_e$$

$\Rightarrow$ Condition de distance

Théorème Japonais (III)



Condition de coupe pour les multiflots

Condition de coupe :

$$\text{Pour tout } U \subset V(G),\ c(\delta^+(U)) \geq r(\delta^-(U))$$

Multiflot entier

$\Downarrow$

Multiflot fractionnaire

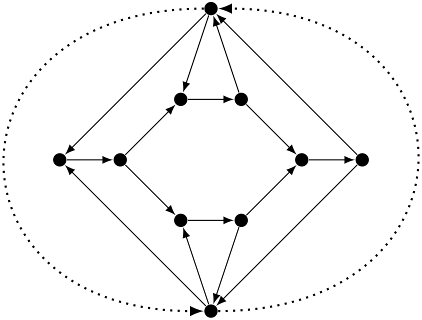
$\Updownarrow$

Condition de distance (Th. Japonais)

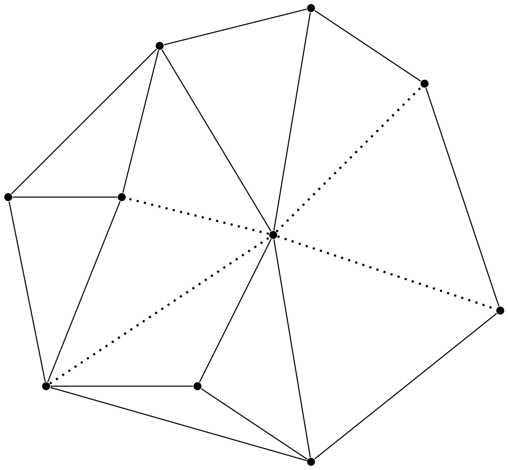
$\Downarrow$

Condition de coupe (CC)

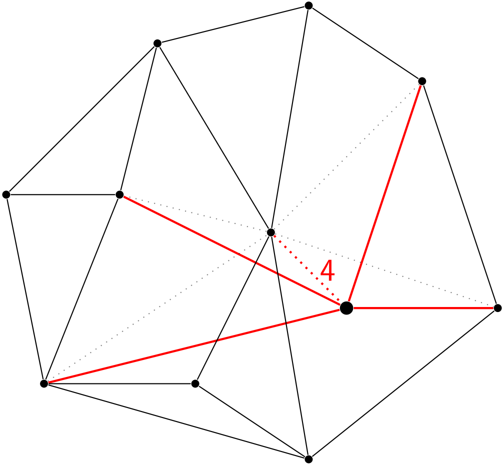
Insuffisance de CC



Cas simple : H étoile



Cas simple : H étoile



Cas simple : $|H| = 2$, digraphe eulérien

Théorème (Nash-Williams, 1960's, Frank 1989)

Soit (G, H, r, c) instance orientée, avec pour tout $u \in V(G)$:

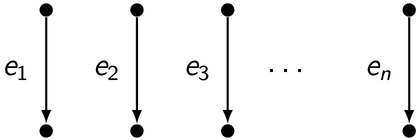
$$\sum_{e \in \delta^+_G(u)} c(e) + \sum_{e \in \delta^+_H(u)} r(e) = \sum_{e \in \delta^-_G(u)} c(e) + \sum_{e \in \delta^-_H(u)} r(e)$$

et $|E(H)| = 2$, alors la condition de coupe implique l'existence d'un multiflot entier

Preuve. . .

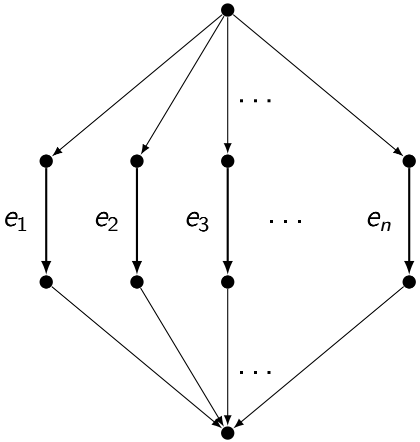
Cas simple : NPc en général

Depuis 3DM.



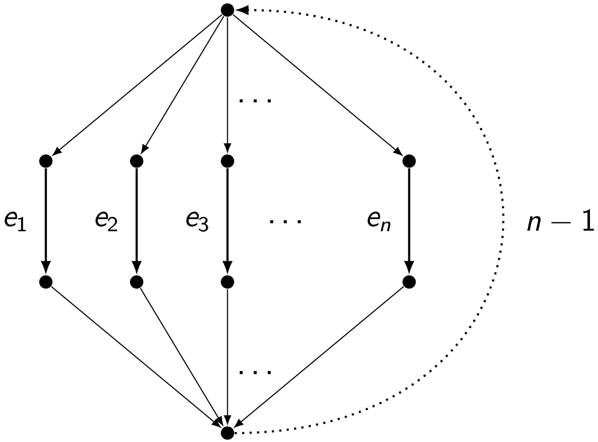
Cas simple : NPc en général

Depuis 3DM.



Cas simple : NPc en général

Depuis 3DM.



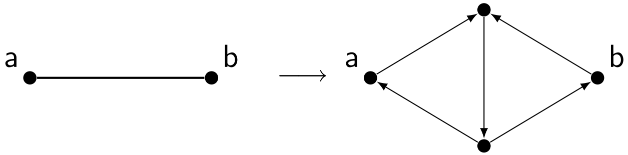
Deuxième Partie

Le Tableau

avec András Sebő

Sommet-disjoint ou arête-disjoint

- Multiflot arc-disjoint ou arête-disjoint,
- Multiflot sommet-disjoint :
  - Pas deux chemins par le même sommet,
  - Pas de capacité sur les arcs ou arêtes.



Topologie du graphe

- G quelconque,
- G planaire,
- $G + H$ planaire.

Demandes et capacités

Demandes :

- $|E(H)| = 2$,
- $|E(H)|$ fixé,
- $|E(H)|$ quelconque.

Capacités :

- fixes (1 partout),
- codées en unaire (multigraphe),
- codées en binaire.

Cas général

		orienté			orienté acyclique			non-orienté		
		arc-d		som-d	arc-d		som-d	arête-d		som-d
$\lvert E(H)\rvert$	r		Euler			Euler			Euler	
arb	bin									
	un									
fixe	bin									
	un					V	FHW			RS
	fixe									
2	bin		NW						RW	
	un			FHW	EIS			EIS		
	fix									
	2									

Cas G planaire

		orienté			orienté acyclique			non-orienté		
		arc-d		som-d	arc-d		som-d	arête-d		som-d
$\lvert E(H) \rvert$	r		Euler			Euler			Euler	
arb	bin									
	un					Ma				
fixe	bin									
	un			S		N				
	fixe									
2	bin									
	un	Mu			N			N		
	fix									
	2									

Cas $G + H$ planaire

		orienté			orienté acyclique			non-orienté		
		arc-d		som-d	arc-d		som-d	arête-d		som-d
$\|E(H)\|$	r		Euler			Euler			Euler	
arb	bin				LY				Sey	
	un							MP		
fixe	bin							Sebő		
	un									
	fixe									
2	bin									
	un	N								
	fix									
	2									

Troisième Partie

Biflots planaires

orienté, arc-disjoint, $|E(H)| = 2$ et G planaire

Quelques résultats

Théorème (Müller, 2004)

Le problème de multiflot entier avec G digraphe planaire et $|E(H)| = 2$ est NP-complet.

Théorème (Schwärzler, 2007)

Le problème de multiflot entier avec G graphe non-orienté planaire et $|E(H)| = 3$ est NP-complet.
Le problème de multiflot entier avec G digraphe acyclique planaire et $|E(H)| = 3$ est NP-complet.

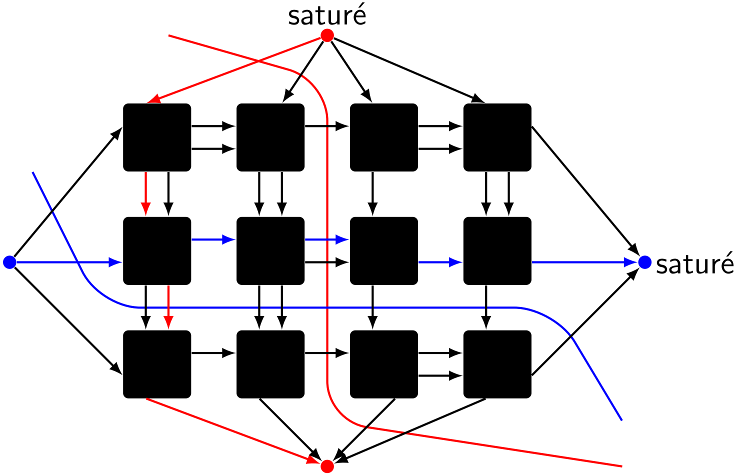
Meilleurs résultats

Théorème

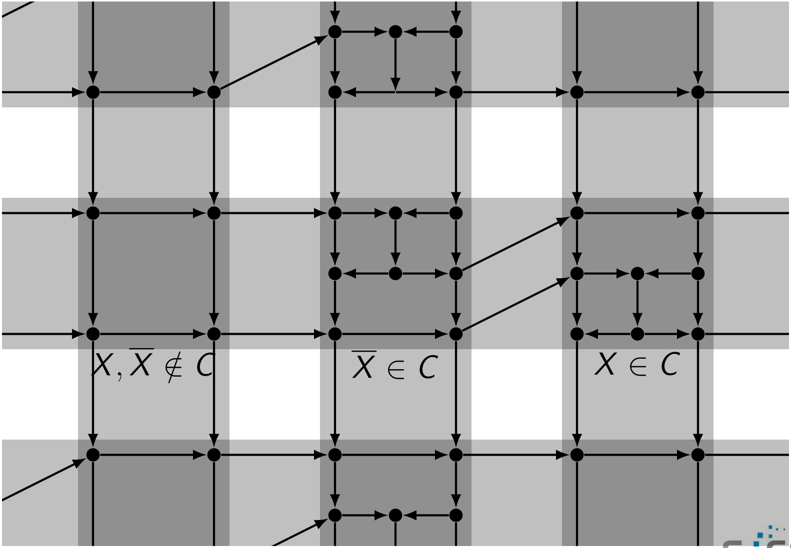
Le problème de multiflot entier avec G digraphe planaire et $|E(H)| = 2$ est NP-complet.
Le problème de multiflot entier avec $G + H$ graphe non-orienté planaire et $|E(H)| = 2$ est NP-complet.
Le problème de multiflot entier avec G digraphe acyclique planaire et $|E(H)| = 2$ est NP-complet.

G-SCOP
SCIENCES POUR LA CONCEPTION, L'OPTIMISATION ET LA PRODUCTION

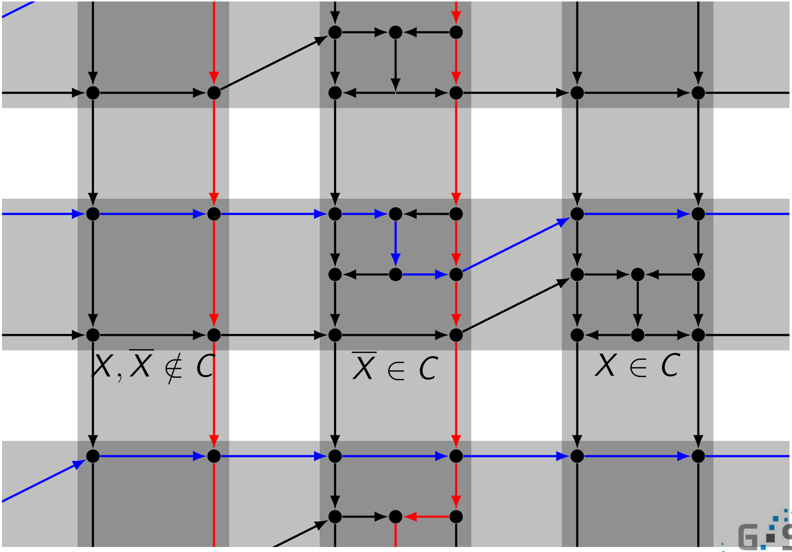
Étape 1 : Grille orientée



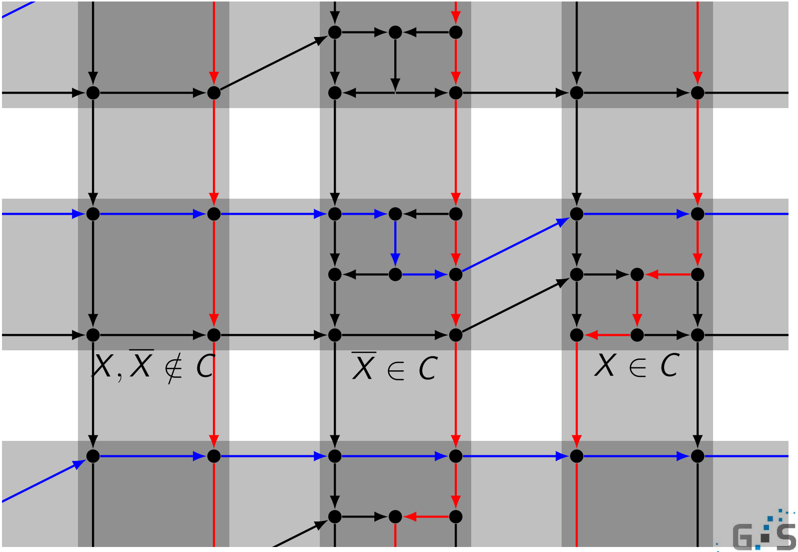
Étape 2 : Coder 3-SAT



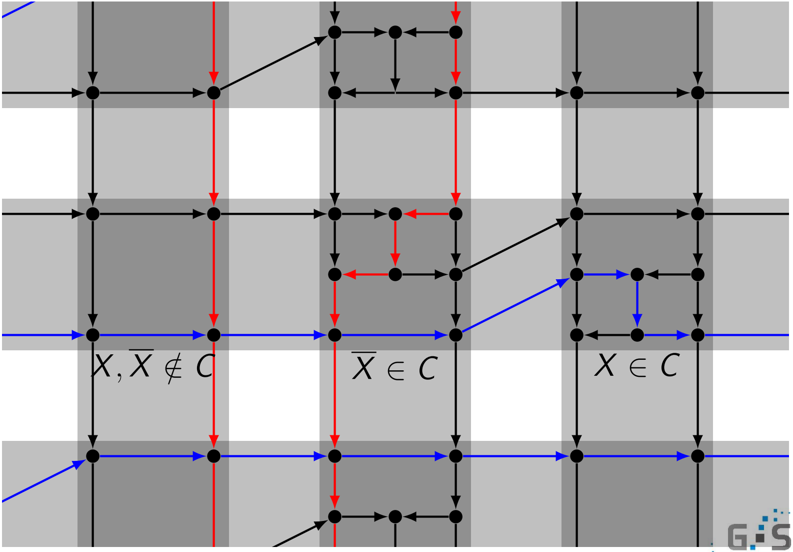
Étape 2 : Coder 3-SAT



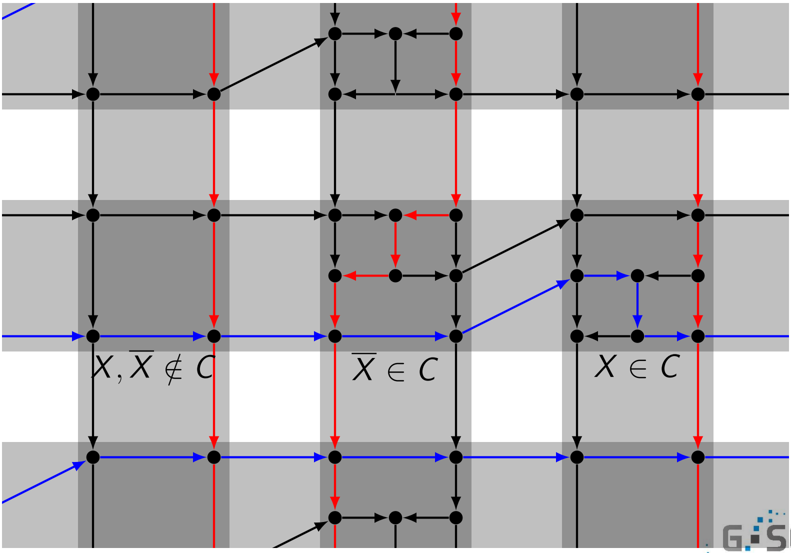
Étape 2 : Coder 3-SAT



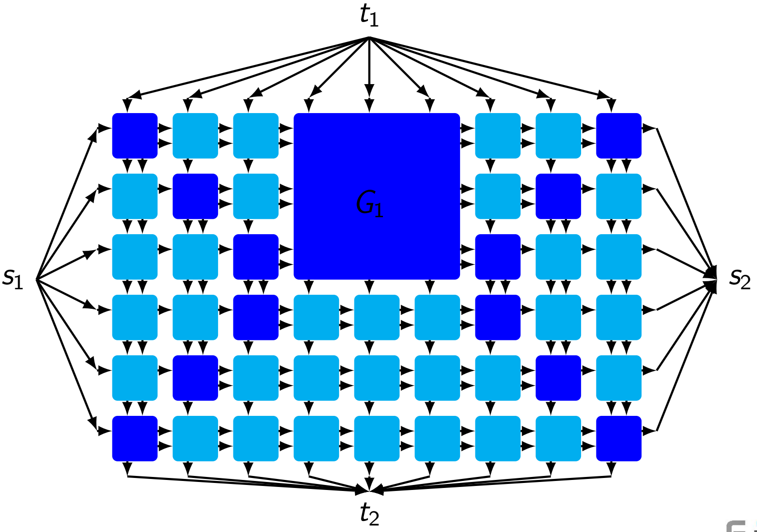
Étape 2 : Coder 3-SAT



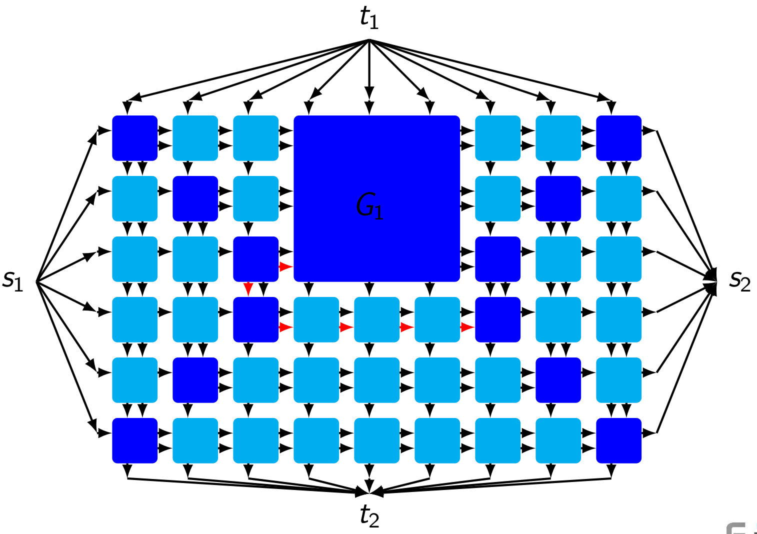
Étape 2 : Coder 3-SAT



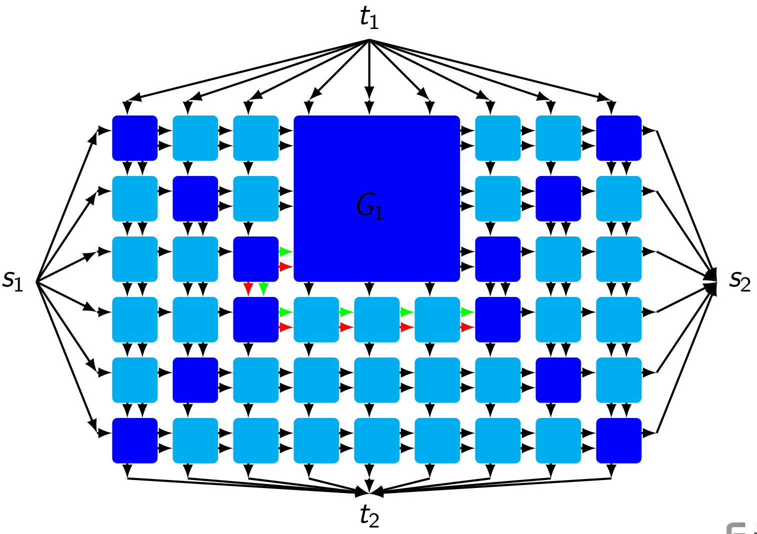
Étape 3 : Comportement des chemins



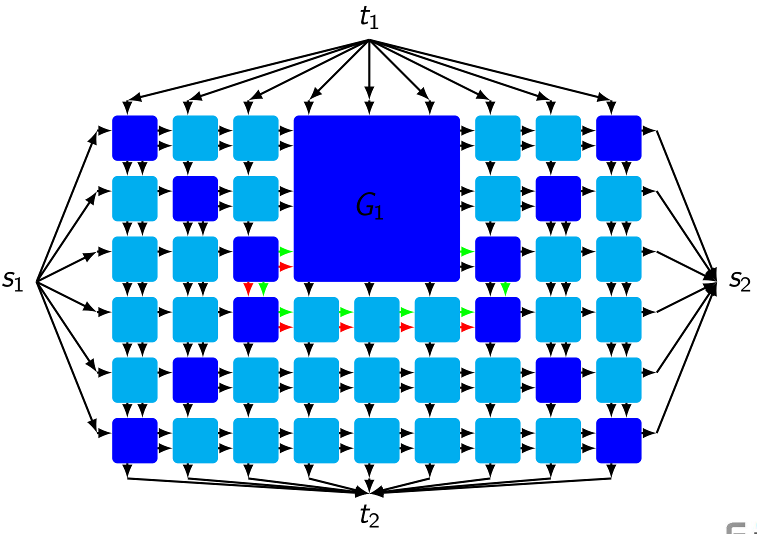
Étape 3 : Comportement des chemins



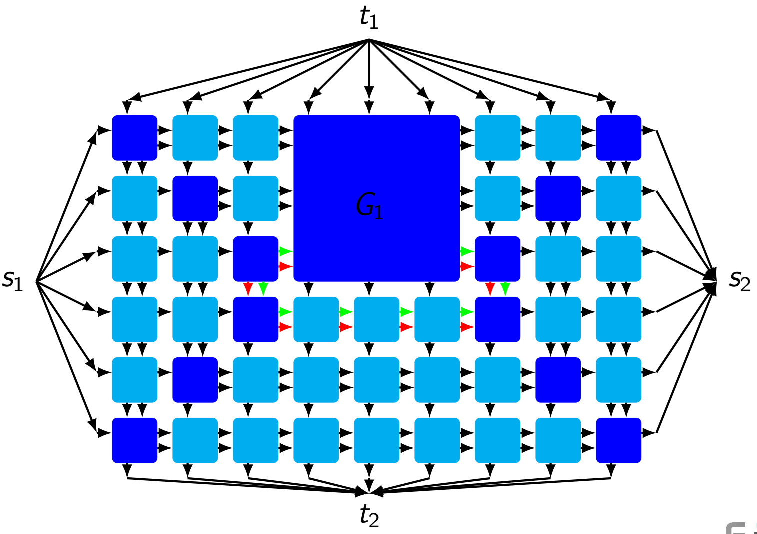
Étape 3 : Comportement des chemins



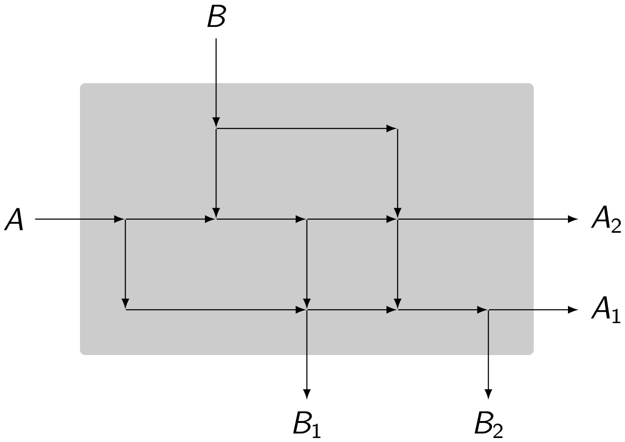
Étape 3 : Comportement des chemins



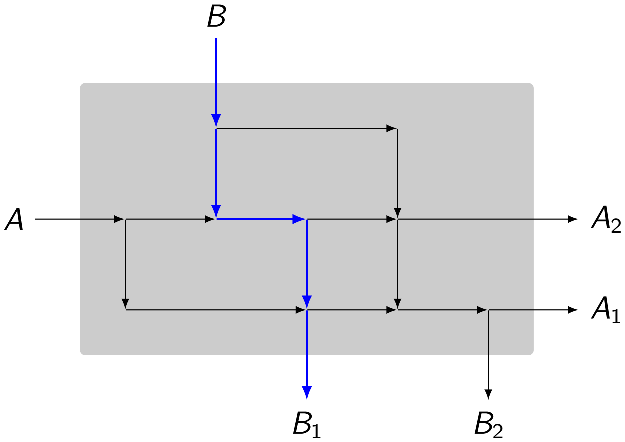
Étape 3 : Comportement des chemins



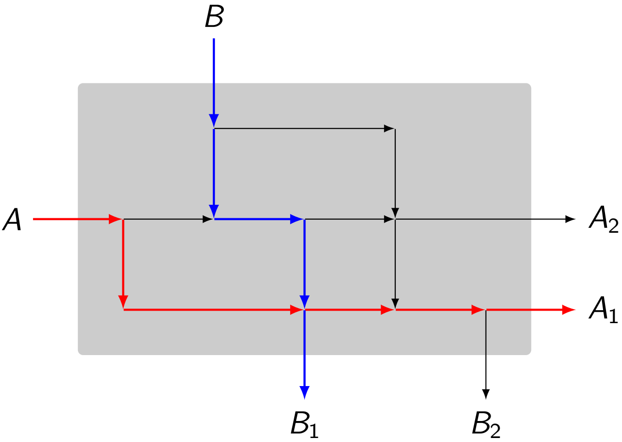
Étape 3 : Gadgets



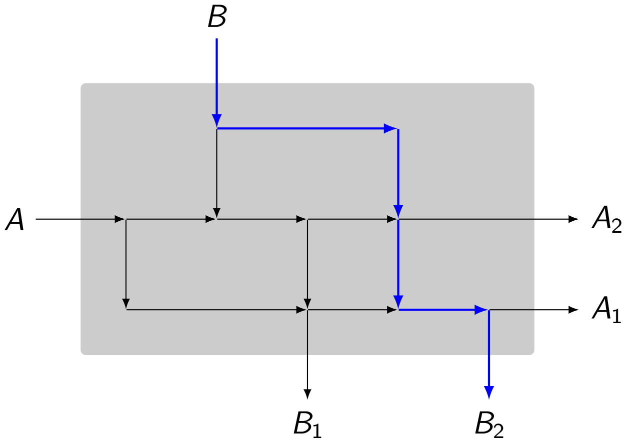
Étape 3 : Gadgets



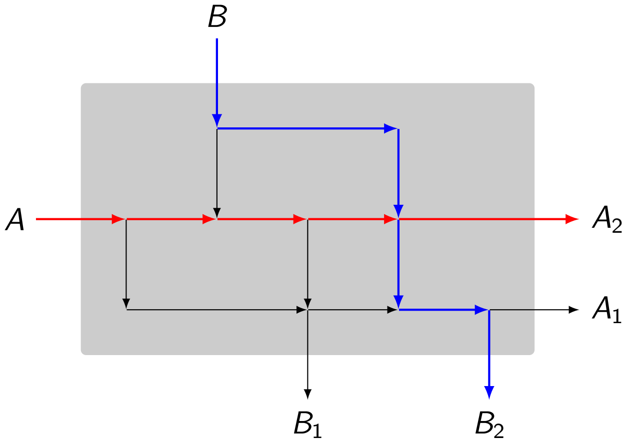
Étape 3 : Gadgets



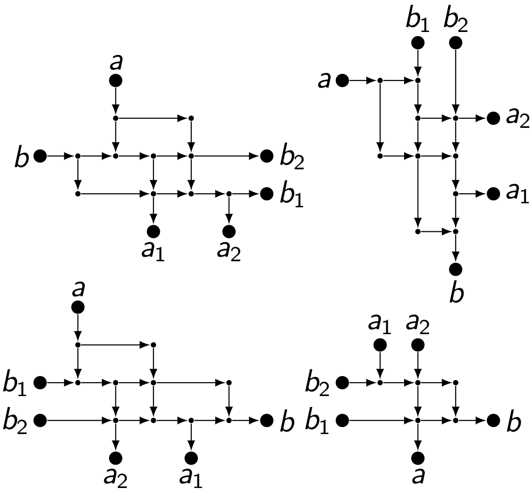
Étape 3 : Gadgets



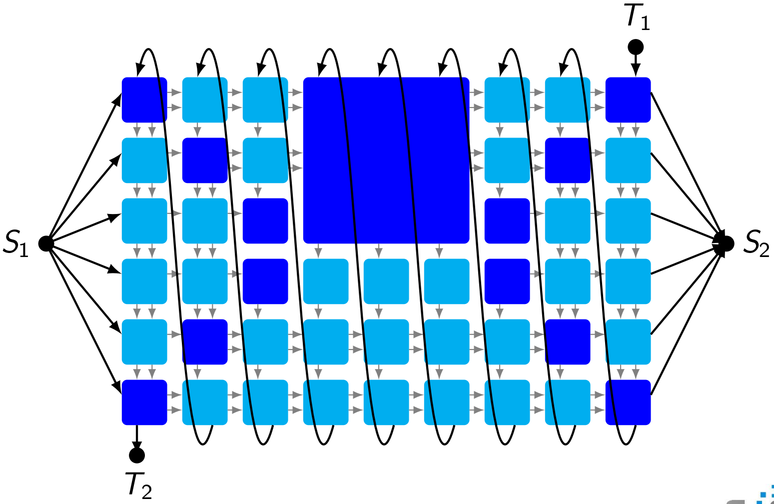
Étape 3 : Gadgets



Étape 3 : les 4 routeurs



Étape 4 : Un flot + un chemin



l'aller-retour

Un problème ouvert particulièrement intéressant :

Problème

Soit G digraphe planaire et s et t deux sommets de G, existe-t-il un cycle orienté passant par s et t ?

Plus généralement : nombre fixe de demande dans les digraphes planaires ?

Quatrième Partie

Chemins disjoints façon Mader

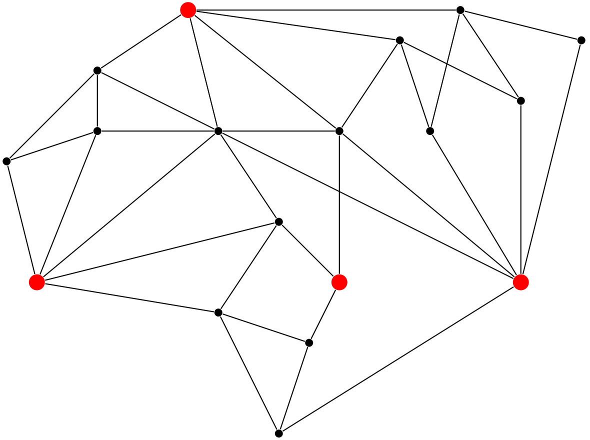
avec Vincent Jost (LIX, CNRS)

Chemins disjoints façon Mader

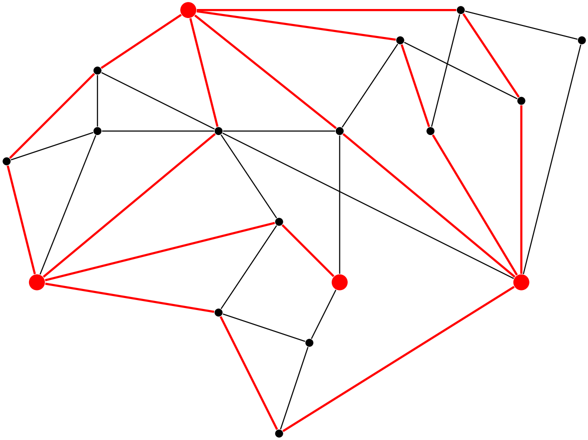
Soit $T \subseteq V$.
T-chemins : $\{(s,t)\text{-chemins} \ : \ s \neq t, s, t \in T\}$

Problème :
Trouver un ensemble maximum de T-chemins internement sommet-disjoints

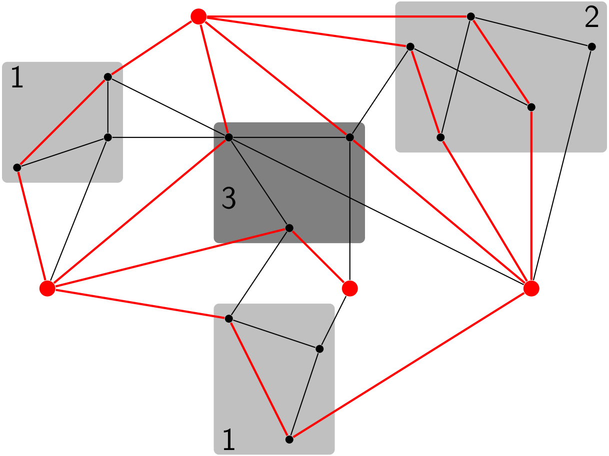
Exemples pour Mader



Exemples pour Mader



Exemples pour Mader



Théorème de Mader

Notons $B_G(U) = |N(V(G) \setminus U) \cap U|$.

Théorème (Mader 1978)

Le nombre maximum de T-chemins internement disjoints est égal au minimum de :

$$|U_0| + \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{1}{2} B_{G-U_0}(U_i) \right\rfloor$$

avec $U_0, U_1, \ldots U_k$ partition de $V \setminus T$ telle que tout T-chemins intersecte $V(U_0)$ ou $E(U_i)$.

Bloquer façon Menger ?

Quand avons-nous :
Le nombre maximum de T-chemins internement disjoints est égal au cardinal minimum d'un ensemble $|U| \subseteq V \setminus T$ tel que $G \setminus U$ n'a pas de T-chemins ?

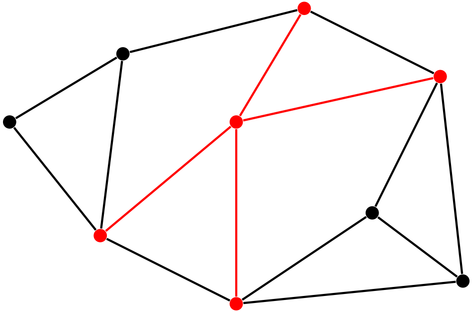
Plus fort : caractériser les graphes G tels que pour tout $T \subseteq V(G)$ stable, le système suivant est TDI :

$$x(P) \geq 1 \quad \text{pour tout } T\text{-chemin } P$$
$$x \in \mathbb{R}_+^{V(G)}$$

Mineurs par sommets (I)

Deux opérations de mineurs :

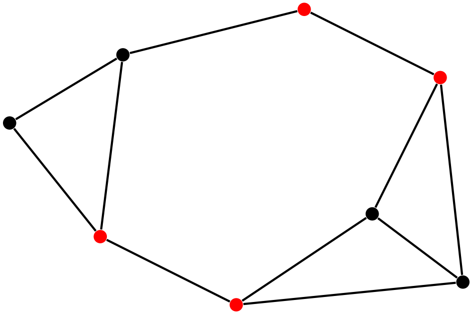
- Suppression de sommet,
- Contraction de sommet (ou clique-contraction).



Mineurs par sommets (I)

Deux opérations de mineurs :

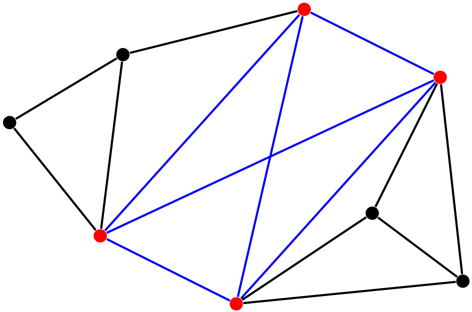
- Suppression de sommet,
- Contraction de sommet (ou clique-contraction).



Mineurs par sommets (I)

Deux opérations de mineurs :

- Suppression de sommet,
- Contraction de sommet (ou clique-contraction).



Mineurs par sommets (II)

Intérêt :
La classe des graphes pour lesquels le système précédent est TDI pour tout stable est fermée par mineur de sommets.

Remarque :
La classe des graphes sans triplets astéroïdaux est fermée par mineur de sommets.

Une caractérisation

Soit G_T le graphe, de sommets $N_G(T)$ obtenu par :

- contraction de $V(G) \setminus N_G(T)$,
- puis suppression des arêtes de $N_G(t)$, $t \in T$.

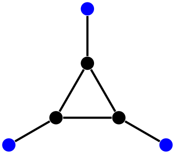
Alors :

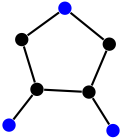
Théorème

$x(P) \geq 1$ est TDI ssi G_T est biparti.

Preuve...

Mineurs interdits





Théorème

Pour tout graphe G sans ces deux mineurs (par mineur de sommet et contraction d'arête), et $\mathcal{A}$ un stable de G, le système suivant est TDI :

$$x(P) \geq 1 \text{ pour tout } \mathcal{A}\text{-chemin } P.$$

En particulier les graphes AT-free.

Fin

Merci de votre attention !