Eternity II
un problème de graphe ?

Eric Bourreau

Groupe de Travail VAG

26/06/08

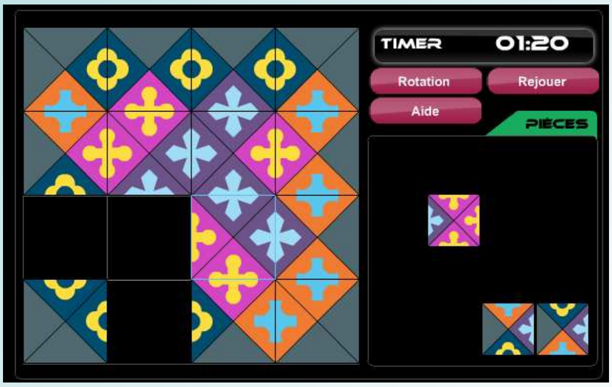
Introduction

- "*eternity II est un jeu combinatoire, qui a pour objectif de trouver une solution.*
  Il se formalise selon différentes approches que nous maîtrisons, et au dire de son auteur il est résoluble par une équipe qui additionne ses petits cailloux (contributions) ".
  Jean Sallantin, 27/07/07

Mini plan
- Un rapide descriptif
- Ma vision *simplifiée* du problème
- Mes questions *Graphe* du problème

Eternity 2 (la démo)

Jeu de plateau, vendu par la société TOMY.
fr.eternityII.com (démo en ligne)



“Make a square from all the pieces,
With the grey ones round the border;(…)
Match all touching pairs of edges,
Do it first and win $2 Millions!”

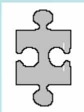
Eternity II (le challenge)

Un plateau 16x16
256 pièces
22 motifs différents

Le premier qui trouve gagne 2 000 000 $

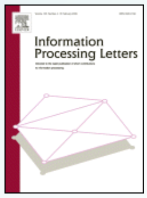
Analyse combinatoire

Edge-matching problem **NP-complete**



Jigsaw Puzzles, Edge Matching, and Polyomino Packing: Connections and Complexity
ED Demaine, ML Demaine (MIT)
Graphs and Combinatorics, june 2007
Springer
(réduction à partir 3-partition)

TETRAVEX is NP-complete
Yasuhiko Takenaga and Toby Walsh.
Information Processing Letters, 99 (5), sept 2006.
Elseiver
(réduction à partir de 3-sat)

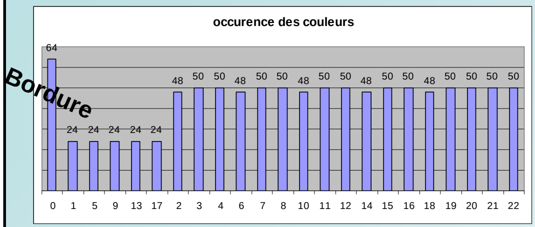


Problème connu dans Kayou (Paulin'06)

- Une affectation de n^2 cartes dans n^2 positions sur le plateau
  contrainte *alldifferent*
- 4 possibilités de rotations (ABCD) (BCDA) (CDAB) (DABC)
  contrainte *element*
- un règle de connexion des faces
  contrainte *égalité*
- Une contrainte liante :
  positions x
  configurations x
  faces contrainte *elementV*

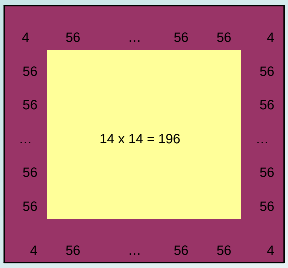
Merci CHOCO (solveur en libre en programmation par contraintes PPC)

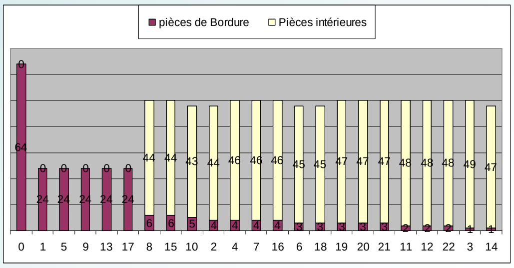
Une première analyse



<u>2 problèmes</u> :

- **Domino 1D** ***FACILE***
  60 dominos, 5 couleurs,
  12 occurrences gauches,
  12 occurrences droites
- **edge-matching** 14x14
  196 pièces, **17** couleurs
  5 x 48 + **12** x 50 occurrences
  rotations





Une deuxième analyse

- <u>Si il ne devait y avoir qu'une solution au centre</u> :

  nombre de placements possibles * probabilité que les faces coïncident = 1

$$195!.4^{195}\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{4.196}{2}}=1$$

➔ c = 16,85…

- <u>Si il ne devait y avoir qu'une solution sur la bordure</u> :

$$4!.56!\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{2.60}{2}}\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{56}{2}}=1$$

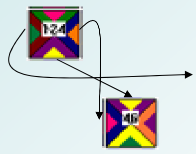
➔ m = 4,97…

- <u>Aucunes pièces identiques</u>

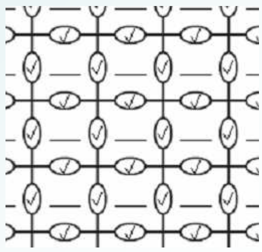
Des questions graphes pour des pistes de résolution

- Couplage sur une grille,
- Une vision duale,
- Un flot de bordure, d'extérieur, d'intérieur
- Parité, couplage et échiquier,
- Des supports d'emboitements,
- Une contrainte cachée,
- Eliminer les rotations
- … et plus encore …

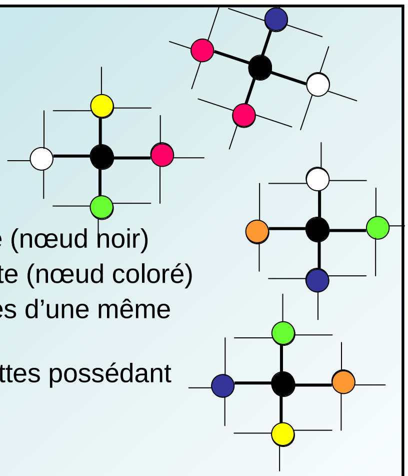
Couplage sur une grille



- Un graphe de connexité
  - G(V,E)
    - Un nœud de V correspond à une pièce
    - Un arête de E autorise la connexion des pièces entre elles via des couleurs compatibles
- Les données : 196 nœuds, grosse connectivité
- Le problème :
  extraire un graphe de grille (?)
  - Tous les degrés égaux à 4
  - Graphe ~~TRIANGulé~~ CARREisé



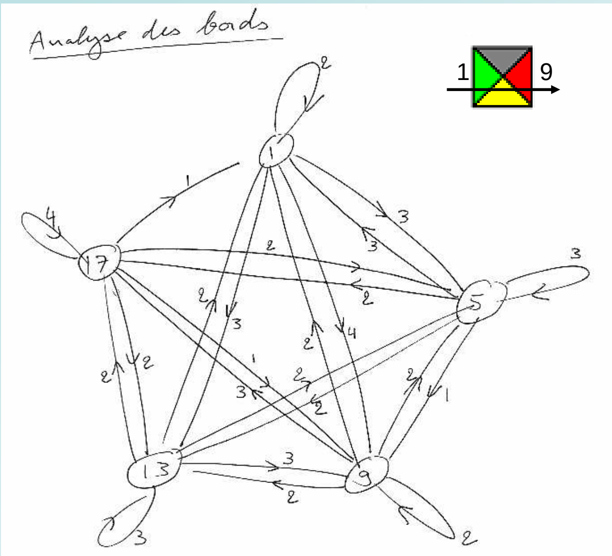
Une vision duale



- Un graphe de facettes
  - $G([V_1,V_2],[E_1,E_2])$
    - Un nœud de V_1 représente la pièce (nœud noir)
    - Un nœud de V_2 représente la facette (nœud coloré)
    - Un arête de E_1 connecte les facettes d'une même pièce entre elles (représenté)
    - Un arête de E_2 connecte deux facettes possédant la même couleur (non représenté)
- Les données :
  - 196 graphes *star* liés par 17 cliques (5 K_{48} + 12 K_{50})
- Le problème : extraire un couplage de chacune de ces cliques (modulo les bords) respectant l'intégrité physique de la pièce [aïe]
  - Piste ? : dist(« nord », voisin, etc, etc, « ouest ») = 10

(Conditions nécessaires … et suffisantes ?)

Une vision flot 1/2 (la bordure)



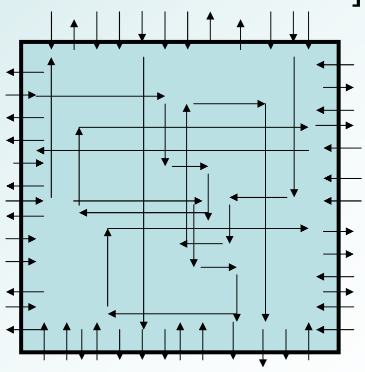
- Graphe de transition G(V,E,C)
  - Un nœud de V pour chaque couleur
  - Une arête de E pour l'existence d'une transition
  - Un cout de C pour le nombre d'occur--rence de chaque transition
- Problème de cheminement

Une vision flot (2/2) (l'intérieur)

- Un flot de transition généralisé en 2 dimensions (4 sens, 12 transitions) [→←↓↑↵ ↱↥↴ …]
- Des entrées et des sorties connues (la bordure)

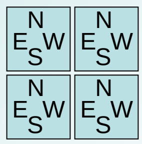
[1 1 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 4 4 5 6 6]

- Une couverture complète par nos flots de transition (difficile ?)

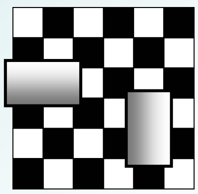


Parité, Couplage et Echiquier

- Dans un couple, il faut être deux
  - Pour chaque couleur, condition nécessaire de parité [*autant dans un sens que dans l'autre*]
    - #N = #S
    - #E = #W



- Une grille est un graphe biparti (échiquier Noir/Blanc)
  - Pour chaque couleur, CN parité biparti [*autant sur les noirs que sur les blancs*]
    - #N Blanc = #S Noir
    - #N Noir = #S Blanc
    - #E Blanc = #W Noir
    - #E Noir= #W Blanc



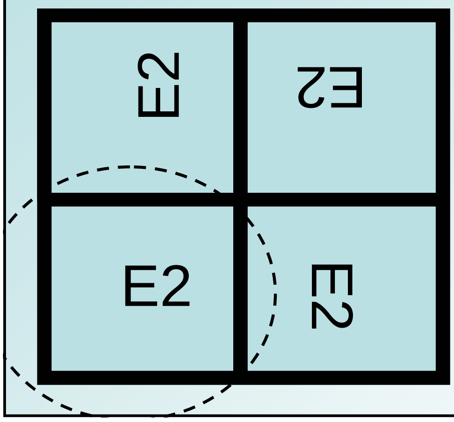
- Vision graphe ?
- Extension à deux couleurs formant un angle ?
- Extension à N couleurs

Graphe de support d'emboitement

- Il n'existe pas que le problème (les pièces) et la solution (le plateau), il y a aussi le bac à sable
  - Constituer des dominos, des polyominos, des amas
  - Chercher les emboitements possibles et impossibles
- Un graphe de support de couplage
    - Projeter préalablement les facettes dans des réceptables à couplage
    - Projeter ces couplages sur le plateau (en respectant les piéces)
  - Raisonnement plus global (condition nécessaire pour imposer/réserver des assemblages)
- Un graphe de support d'angles,
- Un graphe de support d'agrafage,
- Un graphe de support de polyomino …

Monter en dimension pour éliminer les rotations [T. Monteil]

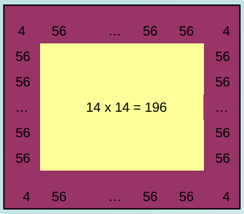
- Eliminer le problème des rotations en projetant les 256 pièces [tournantes] vers 1024 pièces [fixes] (pour chaque pièce, faire apparaître explicitement les 4 rotations)



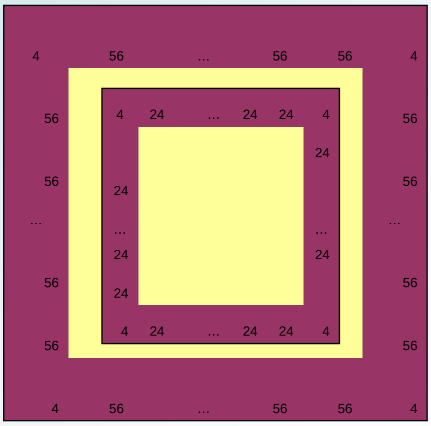
- Agrandir le plateau pour passer à un 32x32 avec en plus des bords, une croix (grise) centrale
- Ajouter une contrainte supplémentaire sur le carré inférieur gauche [*un seul représentant parmi le groupe de 4 pièces pivotées*]
- Résoudre ce problème simplifié

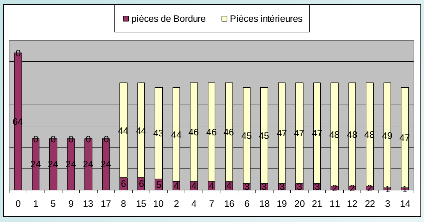
Une contrainte cachée

N'existe-t-il pas encore un sous ensemble particulier (« familiar pattern »$_{CM}$) ???



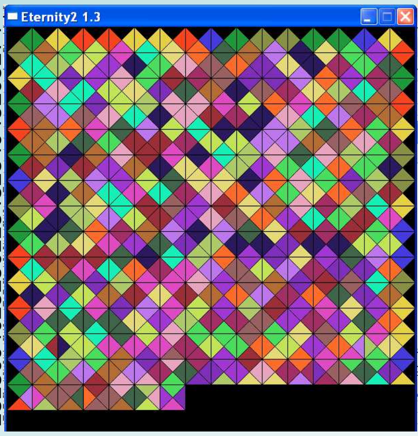
?





… et encore plus …

- Domino packing
- Diophantiennes
- Hamming constraints
- chemins disjoints sur une grille



231560462525621548254945295274

231560462525621548254945295274

$$\sum_{1}^{32} = 50$$