

Feuille de travaux dirigés

TD 5 : Simplification, Comparaison, Dédution

durée : 2 séances

Exercice 1 (Simplification)

Au moyen des règles de simplification, donner une formulation conjonctive pure (\neg et \wedge), disjonctive pure (\neg et \vee), et implicative pure (\neg et \Rightarrow) pour chacune des formules ci-dessous :

- $\Phi_1 = (a \Rightarrow b) \wedge c$
- $\Phi_2 = \neg(a \wedge \neg b) \vee (b \Leftrightarrow a) \Rightarrow (\neg b \Leftrightarrow a)$

Exercice 2 (Formes normales)

Pour chacune des formules suivantes (extraites de l'exercice 4 de la feuille de TD 4) :

- $\Phi_1 = (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$
- $\Phi_2 = ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

1. Donner une forme normale conjonctive (FNC) et une forme normale disjonctive (FND) par simplification.
2. En utilisant les tables de vérité produites au TD 4, donner la FND canonique de ces formules.
3. Repartir des FND trouvées à la première question et les transformer en FND canoniques par complétion. Comparer aux résultats de la question précédente.

Exercice 3 (Comparaison)

Trouver parmi les formules données ci-dessous lesquelles sont synonymes en écrivant leurs tables de vérité :

- $\Phi_1 = (a \Rightarrow \neg b) \wedge (b \Rightarrow c)$
- $\Phi_2 = (\neg a \wedge \neg c) \Rightarrow (\neg c \Rightarrow b)$
- $\Phi_3 = b \Rightarrow (a \vee b \Rightarrow \neg(c \Rightarrow a))$

Trouver une simplification de l'une vers l'autre des 2 formules synonymes.

Exercice 4 (Dédution naturelle)

Démontrer la validité des conséquences logiques suivantes en utilisant la déduction naturelle :

- $p \vee q \models q \vee p$
- $p \Rightarrow (q \Rightarrow r), p, \neg r \models \neg q$
- $p \vee q, p \Rightarrow r \wedge q, \neg(p \wedge r) \Rightarrow \neg q \models r$

Exercice 5 (Validation de raisonnements complexes)

Indiquez pour chacun des raisonnements suivants s'il est valide ou non.

1. Si le train est en retard et qu'il n'y a pas de taxi à la gare, alors Jean est en retard. Le train est en retard. Jean arrive à l'heure. Par conséquent, il y avait des taxis à la gare.
2. Si Bill prend l'autobus, alors il manque son rendez-vous si l'autobus est en retard. Bill ne devrait pas aller à la maison s'il manque son rendez-vous et qu'il se sent déprimé. Si Bill n'obtient pas l'emploi, il se sent déprimé et il ne devrait pas aller à la maison. Par conséquent, Si Bill prend l'autobus mais qu'il n'obtient pas l'emploi, alors soit l'autobus est à l'heure soit il ne devrait pas aller à la maison.
3. Si Superman voulait et pouvait prévenir le mal, il le ferait. Si Superman ne pouvait prévenir le mal, il serait impuissant ; s'il ne voulait pas prévenir le mal, il serait malveillant. Superman ne prévient pas le mal. Si Superman existe, il n'est ni impuissant, ni malveillant. Par conséquent, Superman n'existe pas.