Ia) p : Il pleut

v : je viens à vélo

h : je suis à l'heure

r : mon réveil sonne en retard

(1) $p \Rightarrow \neg v$

(2) $(r \wedge \neg v) \Rightarrow \neg h$

(3) r

(4) h

(5) $\neg p$

Ib) $p \Rightarrow \neg v, (r \wedge \neg v) \Rightarrow \neg h, r, h \vdash \neg p$

I c)

que des axiomes, 5 est bien conséquence de 1, 2, 3 et 4

$$
\dfrac{
  \dfrac{\overbrace{(r\wedge\neg v)\Rightarrow\neg h,\ r,\ h,\ p \vdash p}^{\text{axiome}}}{(r\wedge\neg v)\Rightarrow\neg h,\ r,\ h \vdash p,\ \neg p}\ \neg d
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \overbrace{\neg v,\ r,\ h \vdash r,\ \neg p}^{\text{axiome}}
      \qquad
      \dfrac{\dfrac{\overbrace{v,\ r,\ h \vdash \neg p,\ v}^{\text{axiome}}}{v,\ \neg v,\ r,\ h \vdash \neg p}\ \neg g}{\neg v,\ r,\ h \vdash \neg v,\ \neg p}\ \neg d
    }{\neg v,\ r,\ h \vdash r\wedge\neg v,\ \neg p}\ \wedge d
    \qquad
    \dfrac{\overbrace{\neg v\ \ r\ \ h \vdash \neg p,\ h}^{\text{axiome}}}{\neg v,\ \neg h,\ r,\ h \vdash \neg p}\ \neg g
  }{\neg v,\ (r\wedge\neg v)\Rightarrow\neg h,\ r,\ h \vdash \neg p}\Rightarrow g
}{p\Rightarrow\neg v,\quad (r\wedge\neg v)\Rightarrow\neg h,\quad r,\ h \ \vdash\ \neg p}\Rightarrow g
$$

$\boxed{\text{II a}}$ (2) $\forall x \forall y \left(\text{apprecie}(x,y) \Rightarrow \text{connait}(x,y) \right)$

$$(3)\ \forall x \forall y \Big[\big((\text{maison}_1(x) \wedge \text{maison}_1(y)) \vee (\text{maison}_2(x) \wedge \text{maison}_2(y)) \vee (\text{maison}_3(x) \wedge \text{maison}_3(y)) \big) \Rightarrow (\text{connait}(x,y) \wedge \text{apprécie}(x,y)) \Big]$$

$$(5)\ \forall x \forall y \ (\text{table1}(x) \wedge \text{table1}(y) \vee \text{table2}(x) \wedge \text{table2}(y)) \Rightarrow (\text{apprécie}(x,y) \vee \neg \text{connait}(x,y))$$

$\boxed{\text{II b}}$ gens : a, b, c, d

maison1 : a, b
maison2 : c
maison3 : d

table 1 : a, c
table 2 : b, d

apprécie : (a,b) (b,a) (a,a), (b,b) (c,c) (d,d)
connait : les mêmes et (b,d)
1, 2, 3, 4 sont vrais
5 n'est pas vrai b et d sont à la même table
b le connaît et ne l'apprécie pas

II c) comme le cas II b, mais sans rajouter (b, d) à connaît c.à.d.

$$\text{connaît}(X, Y) \equiv \text{apprécie}(X, Y).$$

II d) Sans connaître le nombre de maisons on devrait écrire

$$\forall x\, \exists ! i\, \big(\text{maison}_i(x) \wedge \forall j\ \text{maison}_j(x) \Rightarrow i = j\big)$$

mais ce n'est pas une formule du 1er ordre car i, j varient parmi les entiers $\leq n$ et non parmi les éléments du modèle. On ne peut quantifier sur l'ensemble des prédicats maisoni.

Il faut donc répéter la propriété pour chaque maisoni :

$$\forall x\, \big[(\text{maison}_1(x) \wedge \neg\text{maison}_2(x) \wedge \neg\text{maison}_3(x))$$
$$\vee\, (\text{maison}_2(x) \wedge \neg\text{maison}_1(x) \wedge \neg\text{maison}_3(x))$$
$$\vee\, (\text{maison}_3(x) \wedge \neg\text{maison}_1(x) \wedge \neg\text{maison}_2(x)) \big]$$

et cela n'est pas possible si on ne connaît pas le nombre de maison_i. (pas de formules infinies).