



Jeudis de l'Université de Montpellier — 19 janvier 2017

**UNE HISTOIRE DE
LA LOGIQUE MATHÉMATIQUE:
DE LA PHILOSOPHIE À L'INFORMATIQUE**

Christian Retoré

Professeur, Université de Montpellier & LIRMM-CNRS

LA LOGIQUE EST ELLE SULFUREUSE?

- **"Forse tu non pensavi ch'io LOICO fossi. [Lucifero]"** Dante Alighieri (1265-1321)
Comedia, Inferno XXVII
Une traduction pourrait être: *"sans doute ne savais tu pas que j'étais aussi bon logicien"*.
- *En tout cas, en Franc, e la logique est peu enseignée:*
 - *Philosophie?*
 - *Mathématiques?*
 - *Informatique?*
 - *Linguistique (sémantique et philosophie du langage)?*



AVANT LA LOGIQUE MODERNE

3 Aristote

Antiquité

Scolastique

LA LOGIQUE

- Art de raisonner correctement
- Avec la rigueur des raisonnements mathématiques (Thalès, Pythagore,...)
- Dériver correctement des énoncés
...mais à partir de quels axiomes?
- Etude de la vérité dans une situation particulière, mais cela est plus récent.

AUPARAVANT: ARISTOTE (III AV JC) L'ANTIQUITÉ & LA SCOLASTIQUE (MOYEN ÂGE)

- Certains types d'énoncés:
 - A Tout A est B
 - E Certains A sont B
 - I Aucun A est B
 - O Tous les A ne sont pas B.
(ou Certains A ne sont pas B, mais le **thème** est différent)
- Les fameux syllogismes (règles de déduction)
 - Barbara : *tout M est P, or tout S est M, donc tout S est P;*
 - Baroco : *tout P est M, or quelque S n'est pas M, donc quelque S n'est pas P*

PRINCIPES ARISTOTE & LES STOÏQUES

○ Aristote

- Identité: Tout A est A
- Non contradiction NON (A et NON A)
- *"Tout personne niant le principe de non contradiction devrait être battue et brûlée jusqu'à ce qu'elle admette qu'être battu n'est pas la même chose que ne pas être battu, et qu'être brûlé n'est pas la même chose que ne pas être brûlé"* Avicenne (980-1037)
- Tiers exclus: A ou NON A (**tertium non datur**)

○ Stoïciens (calcul propositionnel)

- Modus ponens Si A alors B Or A donc B.
- Modus tollens Si A alors B. Or NON B. Donc A.
- **Ex falso quodlibet sequitur**

PLACE DE LA LOGIQUE EN PHILOSOPHIE

- A étudier en premier pour raisonner correctement (Organon Catégories,..)
- « *Celui qui souhaite atteindre la perfection humaine doit d'abord étudier la logique, puis les diverses branches des mathématiques dans l'ordre qui convient, puis la physique et enfin la métaphysique.* » (Maimonides, XIIe)

XIXE: LOGIQUE ALGÈBRIQUE (ANGLO-AMÉRICAINNE) BOOLE, DE MORGAN, PIERCE

- Précurseur: Leibniz (1646-1716)
mais différent on lui doit aussi les mondes possibles
- Lois et calculs
- Calcul propositionnel: tables de vérités
 - $X \rightarrow \text{VRAI} : \text{VRAI}$
 - $\text{FAUX} \rightarrow X : \text{VRAI}$
 - $\text{VRAI} \rightarrow \text{FAUX} : \text{FAUX}$
(si Paris est en France alors Rome est en Chine)
- Pour les prédicats des règles parfois fausses
 $\forall x [I(x) \rightarrow (F(x) \vee M(x))]$
 \Leftrightarrow
 $\forall x (I(x) \rightarrow F(x)) \text{ ou } \forall x (I(x) \rightarrow M(x))$
pensez à I=Individu F=femme M=homme ...



XXE SIÈCLE

9

La crise des fondements des mathématiques

Les débuts de la logique mathématique

La logique du premier ordre

GOTTLOB FREGE (1848-1925)

- Calcul des prédicats (formules quantifiées)
 - Tout x est P : $(x) P(x)$ ou $\forall x P(x)$
 - Certains x sont P : $Ex P(x)$ ou $\exists x P(x)$
- Tout A est B :
Pour tout X , SI X est A ALORS X est B
 $\forall X (A(X) \rightarrow B(X))$
- Certains A sont B :
Il existe X , tel X est A ET X est B .
 $\exists X (A(X) \text{ ET } B(X))$
- Système déductif avec des règles comme:
 - SI on a établi $P(x)$ ou x est une variable dont on ne suppose aucune propriété ALORS on a $\forall x P(x)$

FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES

GEORG CANTOR (1845-1918)

- Infinis, plusieurs sortes de nombres: Ordinaux, Cardinaux
- Il ya plusieurs sortes d'infinis
- Il y a plus de nombres réels que d'entiers: Si nous avons une liste des nombres réels entre 0 et 1 (développements décimaux infinis, sans 999999...)
 1. 0,5786086346780965431346789098764666...
 2. 0,8861453781936528901766189918714428...
 3. 0,8623503894729474548494646849947452...
 4. 0,5618903412252820282534176444510186...
- Créons un nombre qui est différent du premier sur la première décimale, du second sur la deuxième, du troisième sur la troisième:
 - 0,6939.... Il n'est pas dans la liste!!!

GIUSEPPE PEANO (1858-1932)

AXIOMATISATION DE L'ARITHMÉTIQUE

- Esperanto mathématique ...
- Symboles: 0 (zéro) +, x ...
fonction S: successeur (l'entier suivant)
- $\forall n \quad S(n) \neq n$
- $\forall n \quad$ si $n \neq 0$ alors il existe p tel que $S(p) = n$
- $\forall n p \quad$ si $S(n) = S(p)$ alors $n = p$
- $\forall n \quad n + 0 = n$
- $\forall n p \quad n + S(p) = S(n + p)$
- $\forall n \quad n \times 0 = 0$
- $\forall n p \quad n \times S(p) = (n \times p) + n$
- Récurrence: pour établir qu'une propriété P(...) est vraie de tout entier il suffit de:
 1. Monter qu'elle est vraie de 0
 2. Montrer qu'elle passe au successeur:
si P(n) alors P(S(n))

DAVID HILBERT (1862-1943) ET LE PROGRAMME ÉPONYME

- En 1900 à Paris 23 problèmes majeurs
- Programme de fondements des mathématiques:
 - Etablir la cohérence des mathématiques
 - Un langage et une axiomatique minimales
- Montrer en raisonnant sur les preuves (de manière finitaire) que les axiomes ne conduisent jamais à une proposition fausse (par ex. $0=1$) par les règles de déduction formelle

BERTRAND RUSSELL (1872-1970)

- Paradoxe de Russell:
 - $U = \{X / X \notin X\}$
 - $U \in U ?$
 - $U \notin U ?$
 - Schéma de compréhension restreint.
- *Principia mathematica* (1910-1913) avec Whitehead formalisation/ axiomatisation purement logique des mathématiques
 - L'entier 2 arrive après 200 pages...

THÉORIE AXIOMATIQUE DES ENSEMBLES

ZERMELO (1871-1953) PUIS FRAENKEL (1891-1965)

- 1 seul symbole: $X \in Y$ (X appartient à Y) (et $=$)
- Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments
- Il existe un ensemble sans élément (le vide)
Formellement: $\exists y \forall x x \notin y$
- Paire, union, ensemble des parties
- Schéma de compréhension restreint:
 - $\{X \in Y \mid P(X)\}$ est un ensemble (exit le paradoxe de Russell)
- Axiome de l'infini: il existe N qui contient \emptyset et
si $x \in N$ alors $(x \cup \{x\}) \in N$

au minimum N contient:

\emptyset ,	$\{\emptyset\}$,	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
0,	1,	2,	3

- On peut faire TOUTES les mathématiques dans ZF

MODÈLE, VÉRITÉ: CALCUL PROPOSITIONNEL

- Suite des travaux de Boole (XIXe)
- Une interprétation:
 - On fixe la valeur, vrai ou faux de chaque proposition élémentaire
 - On en déduit la valeur dans cette interprétation des propositions complexes par les tables de vérités
- Validité:
 - Une proposition dérivable (par exemple $p \rightarrow p$) vaut vrai dans toute interprétation
- Complétude:
 - Si une proposition vaut vrai dans toute interprétation, alors elle est dérivable (Bernays, 1926)

MODÈLE, VÉRITÉ: CALCUL DES PRÉDICATS

1/2

- La même chose, en plus compliqué:
 - Ensemble (domaine) par exemple les gens
 - Interprétation des constantes, des relations, ...
 - Dort: ensemble de personnes
 - Connaît: ensemble de couples
 - On peut vérifier dans un modèle donné que, par exemple:
 - Pour tout x il existe y, x connaît y et y dort;
- Il y a des formules vraies dans TOUT modèle:
 - SI il existe X tel que pour tout Y
X soit en relation R avec Y
ALORS pour tout Y il existe un X
tel que X soit dans la relation R avec Y
 - C'est-à-dire $\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$
-

MODÈLE, VÉRITÉ: CALCUL DES PRÉDICATS

2/2

- Validité
- Toute formule démontrable formellement est vraie dans tout modèle,.
- **Complétude (Gödel, 1929) :**
Toute formule vraie dans tout modèle est formellement démontrable

LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER (1881-1966) ET L'INTUITIONNISME

- Rejet du tiers exclus:
 - A ou non A
 - Différent de non (A et non A)
 - « ou » intuitionniste: plus exigeant
- Même chose pour le « il existe »
 - Existe x $P(x) = P(0)$ ou $P(1)$ ou $P(2)$...
 - Ne se déduit pas de NON pour tout X non $P(x)$
- Raisonnement qui construit la solution
- Ex. théorème des valeurs intermédiaires
- Paradoxe du buveur:
 - Il existe X tel que si X boit alors tout le monde boit.

KURT GÖDEL (1906-1978)

- Complétude de la logique du premier ordre et compacité
- Compatibilité de l'axiome du choix
- Compatibilité de l'hypothèse du continu
- Incomplétude de l'arithmétique
 - Il existe des formules de l'arithmétique qui ne sont ni démontrable ni réfutables
 - En particulier la cohérence de la théorie qui peut s'exprimer dans la théorie n'est pas démontrable.

EN RÉSUMÉ: FONDAMENTAUX

- Preuves (Frege, Hilbert, Gentzen)
- Modèles (Frege)
- Théorie des ensembles, ordinaux, cardinaux (Cantor, Zermelo Fraenkel, Gödel)
- *Lowenheim Skolem:*
une théorie qui admet un modèle infini en admet de toute cardinalité infinie
- Complétude de la logique du premier ordre (Gödel, Herbrand)
- *Compacité (Gödel):*
étant donné une famille de formules dont chaque partie finie admet un modèle, toute la famille admet un modèle
- Incomplétude de l'arithmétique de Peano. (Gödel)



INFORMATIQUE

Et calculabilité

22

POURQUOI LA SCIENCE INFORMATIQUE EST ELLE AUSSI LIÉE À LA LOGIQUE

- Informatique? Science? Technologie ?
 - Données (→ informatics)
 - Calcul (→ computer science)
- Mécanisation du raisonnement (et du calcul) dans le programme de Hilbert
- Formalisation, codage,...(cf. Gödel)
- DÉCIDABLE ~ CALCULABLE

- Dès les débuts analyse du langage naturel, test de Turing pour l'intelligence artificielle: berner 30% des humains dans un dialogue.

MACHINE ABSTRAITE 1936

ALAN TURING (1912-1954)

- Ruban avec des 0 et des 1 (qui peuvent « tout » représenter via divers codages)
- Tête qui parcourt le ruban
- Etats: 1 initial plusieurs finaux
- Actions
 - lire, écrire (0, 1, rien),
 - déplacer (gauche, droite, rien),
 - Changement d'état
- Instructions:
si dans tel état si on lit tel caractère
alors on fait telle écriture,
on déplace la tête et on va dans tel état.

MACHINES DE TURING: TERMINE? OU PAS?

- La machine s'arrête quand on atteint un des états finaux
- Le problème de l'arrêt des machines de Turing est indécidable. Il n'y a pas de machine de Turing qui étant donné (sur un ruban):
 - Un entier m qui code une machine de Turing M (un texte finit décrit la machine, et il se représente par un nombre entier)
 - Et un entier n
 - Répond 1 si la machine M s'arrête sur l'entrée n et 0 sinon.

MACHINE DE JOHN VON NEUMAN (1903-1957)

- 1 processeur
- 1 mémoire : données + programme
- Contrôleur qui dicte la séquence des opérations
- Nos ordinateurs fonctionnent toujours ainsi, mais ils communiquent entre eux.

CALCULABILITÉ À LA CHURCH (1903-1995)

LAMBDA CALCUL

- Du point de vue des ensembles, un nombre est la classe des ensembles ayant le même nombre d'éléments.
- En lambda calcul le nombre n est défini ainsi:
appliquer n fois une fonction F a quelque chose:
 $f(f(f(x))) : 3$
 $S(S(S(0))) : 3$
 $\text{mère}(\text{mère}(\text{mère}(\text{Jean}))) : 3$

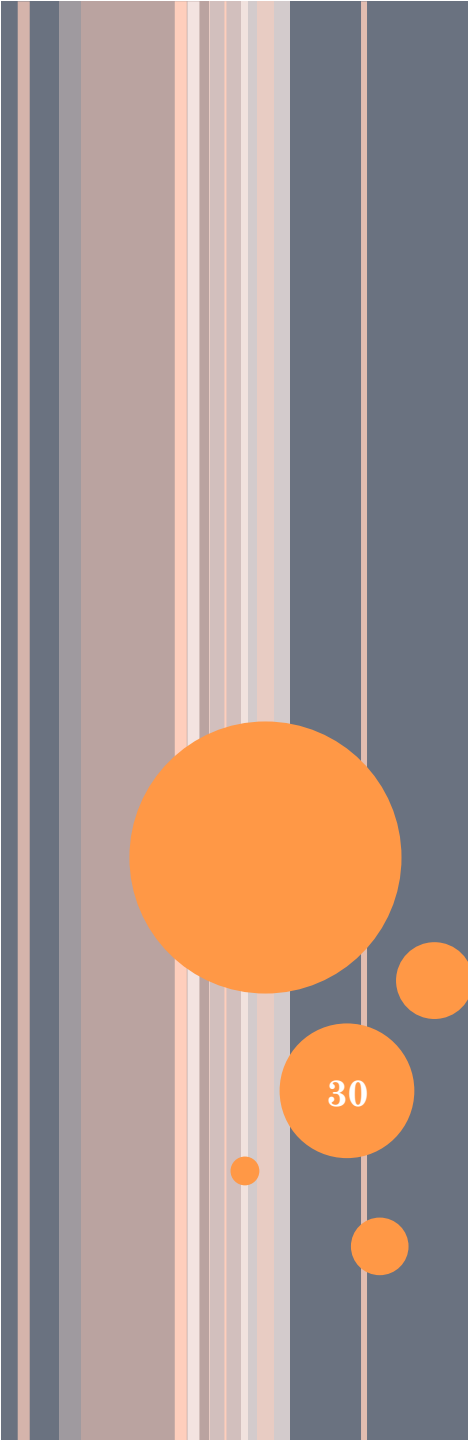
CALCULABILITÉ À LA CHURCH

LAMBDA CALCUL

- En lambda calcul tout est fonction/action
- 3: $(\lambda x \lambda f (f(f(x))))$
- S: $\lambda n \lambda x \lambda f f(n x f)$
- +: $\lambda n \lambda p \lambda x \lambda f n (p x f) f$
- Calculer c'est remplacer la variable par sa valeur... $(\lambda x. (x+3)) 5 \rightarrow 5+3$ [substitution]
- Quelles fonctions sur les entiers peut on définir?
- Les mêmes que celle de Turing!
- Lambda calcul inventé pour formaliser la logique, pour substituer des formules dans d'autres:
axiome appliqué à instance particulière :
 $(\lambda p p \Rightarrow p)(A \& B)$ donner $(A \& B) \Rightarrow (A \& B)$

THÈSE DE CHURCH TURING (1912-1954)

- La machine de Turing ou le lambda calcul de Church (équivalents) rendent exactement compte de tout ce qui se calcule automatiquement.
- Le lien avec la logique est assez clair, comme on peut coder par des entiers:
 - Les formules
 - Les preuves
 - On peut concevoir une machine qui vérifie si une preuve est correcte et parfois si formule est prouvable.
 - Décidabilité ~ prouvabilité



PREUVES, 1^{ÈRE} APPLICATION LOGIQUE INTUITIONNISTE ET PROGRAMMES CERTIFIÉS

Preuves, types et programmes

30

LA DÉDUCTION NATURELLE

GERHARD GENTZEN (1909-1945),
DAG PRAWITZ (1936-...)

- Dédutions sous hypothèses
- Des règles simples:
- Bizarrement, la logique sous jacente est intuitionniste et non classique:
- $((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a$ n'est pas démontrable mais elle est démontrable classiquement:
 - Si a vrai OK
 - Si a faux $(a \rightarrow b)$ vrai donc $((a \rightarrow b) \rightarrow a)$ est faux OK

23 SIÈCLES APRÈS ARISTOTE — ENFIN! — DES RÈGLES DE DÉDUCTION SIMPLES

- Axiome $A \vdash A$
- Modus ponens:
Si $\Gamma \vdash A$ et $\Delta \vdash A \rightarrow B$
alors Si $\Gamma \Delta \vdash B$
- Abstraction:
Si $\Delta, A \vdash B$
Alors $\Delta \vdash A \rightarrow B$
- Système suffisant pour dériver les propositions intuitionnistes valide (écrites avec \rightarrow)
- Suffisant pour représenter les entiers!

LA CORRESPONDANCE DE CURRY-HOWARD (1900-1982 & 1926-...)

- Types de données = formule logique
ex entier: $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow A$
- Donnée de type A = preuve de A
- Type $A \rightarrow B$
fonction de A dans B c'est-à-dire
fonction des preuves de A dans les preuves de B :
évidemment: le modus ponens fait le boulot!
preuve de A , preuve de $A \rightarrow B$
donc preuve de $A \rightarrow B$

L'ENTIER 3 VU SOUS UN ANGLE DIFFÉRENT

- Une preuve de : $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow A$?
- Il établir A sous les hypothèses $(A \rightarrow A)$ et A
 on part de $A \vdash A$ (0)
 et de $A \rightarrow A \vdash A \rightarrow A$ (S) (axiomes)
 par modus ponens on obtient $A, A \rightarrow A \vdash A$ (1)
 par (1) en utilisant de nouveau (S), on obtient par
 modus ponens $A, A \rightarrow A, A \rightarrow A \vdash A$ (2)
 par (2) en utilisant de nouveau (S), on obtient par
 modus ponens $A, A \rightarrow A, A \rightarrow A, A \rightarrow A \vdash A$ (3)
- Par abstraction: $A \vdash (A \rightarrow A) \rightarrow A$
- Par abstraction encore: $\vdash A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A$

L'ENTIER 3 VU SOUS UN ANGLE DIFFÉRENT

- Notre preuve de : $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow A$
consiste en 3 applications de $A \rightarrow A$ à $A...$
c'est donc l'entier 3 du lambda calcul de Church
- On peut l'écrire $(\lambda x^A \lambda f^{A \rightarrow A} (f(f(f(x)))))$

CORRESPONDANCE LOGIQUE / CALCUL

Logique

- Formule A
- Preuve de A
- Normalisation de la preuve (substitution d'une variable par sa valeur)

informatique

- Type A
- Programme de type A
- Evaluation du programme preuve (substitution d'une variable par sa valeur)

PROGRAMME CERTIFIÉS: LES PREUVES VUES COMME DES PROGRAMMES

- Santé, aéronautique, finances, protocoles de connexion...
il faut des programme sûrs
- **Deux méthodes (et demi):**
 1. Tests (pas vraiment sûrs, demie méthode)
 2. Vérification que le programme satisfait sa spécification
 3. **Preuves de la spécification → programmes**
Alors il est sûr que le programme obtenu fait exactement ce qu'il est supposé faire.
Programmes peu efficaces mais parfaitement sûrs.
- **Démonstration automatique (Coq)**
utile pour 1 et 2

PROGRAMMER = PROUVER (PROOFS AS PROGRAMS)

Prenons le cas d'une fonction f des entiers dans les entiers.

p est un entier s'écrit logiquement ainsi

$$N(p): \forall X [X(0) \& (\forall y X(y) \rightarrow X(Sy))] \rightarrow X(p)$$

« p satisfait toute propriété X qui est vraie de 0 et qui passe au successeur »

1. On écrit la spécification du programme:
par exemple $f(0)=1$ $f(Sx)=(S(S(S(x))))$
2. On démontre formellement $\forall x N(x) \rightarrow N(f(x))$
en utilisant exclusivement la logique
et la définition de f (Coq?)
3. On ne garde que la partie propositionnelle
4. On construit le lambda terme \underline{f}
5. Lambda terme \underline{f} appliqué à un entier p du lambda calcul, se réduit en l'entier $\underline{3p+1}$ lambda calcul

PREUVES

- Initialement: cohérence des mathématiques
- Contenu calculatoire (en logique intuitionniste)
- Programmes fonctionnels typés
 - Temps de calcul élevé
 - Mais totalement sûrs
- Vérification d'un protocole de communication, de programmes embarqués,
- Fondeents des maths / informatique dès 1970
 - Jean-Yves Girard (1947-...) *mon directeur de thèse*
 - Per Martin-Löf (1942-...)
 - John Reynolds (1935-...)
 - Gérard Huet (1947-...)
 - Jean-Louis Krivine (1939-...)



PREUVES, 2^E APPLICATION: CALCUL DU SENS D'UNE PHRASE

Approche logique et compositionnelle
de la grammaire et du sens

40

ANALYSE GRAMMATICALE: PREUVE JOACHIM LAMBEK (1922-2014)

- Logique sous structurelle
 - aux ressources (mots catégories grammaticales)
 - à l'ordre des dites ressources
- Analyse de S = preuve que S est une phrase
- Un lexique associe à chaque mot des formules (son comportement grammatical, ses manières de se combiner avec d'autres mots)

CALCUL DE LAMBEK (1958)

(LOGIQUE LINÉAIRE NON COMMUTATIVE)

4 RÈGLES UNIVERSELLES

$$\frac{A/B \quad B}{A} [/ E]$$

$$\frac{\dots [B]^n \quad A}{A/B} [/ I]^n$$

$$\frac{B \quad B \setminus A}{A} [\setminus E]$$

$$\frac{[B]^n \dots \quad A}{B \setminus A} [\setminus I]^n$$

EXEMPLE 1/5

LEXIQUE SYNTAXIQUE

- Les enfants prendront une pizza.
- Enfant(s), pizza: n
- Prendront: $(np \setminus S)/np$
- (tous) les, un : $S/(np \setminus S)/n$ ou $((S/np) \setminus S)/n$
- Parallèle (connu depuis l'antiquité):
 - n: nom commun: prédicat unaire
 - $np \setminus S$ Verbe intransitif : prédicat unaire
 - $(np \setminus S)/np$ Verbe transitif: prédicat binaire
 - np Groupe nominal: individu
 - np Nom propre: individu
 - $n \setminus n$ Adjectif: prédicat ou prédicat de prédicat

EXEMPLE 2/5

LEXIQUE SYNTAXIQUE ET SÉMANTIQUE

mot	catégorie syntaxique u type sémantique u^* sémantique : λ -term of type u^* x^v signifie x (<i>variable, constante</i>) de type v
les	$(S/(np \setminus S))/n$ (subject) $((S/np) \setminus S)/n$ (object) $(e \rightarrow t) \rightarrow ((e \rightarrow t) \rightarrow t)$ $\lambda P^{e \rightarrow t} \lambda Q^{e \rightarrow t} (\forall^{(e \rightarrow t) \rightarrow t} (\lambda x^e (\Rightarrow^{t \rightarrow (t \rightarrow t)} (P x)(Q x))))$
une	$((S/np) \setminus S)/n$ (object) $(S/(np \setminus S))/n$ (subject) $(e \rightarrow t) \rightarrow ((e \rightarrow t) \rightarrow t)$ $\lambda P^{e \rightarrow t} \lambda Q^{e \rightarrow t} (\exists^{(e \rightarrow t) \rightarrow t} (\lambda x^e (\wedge^{t \rightarrow (t \rightarrow t)} (P x)(Q x))))$
enfant(s)	n $e \rightarrow t$ $\lambda x^e (\text{enfant}^{e \rightarrow t} x)$
pizza	n $e \rightarrow t$ $\lambda x^e (\text{pizza}^{e \rightarrow t} x)$
prendront	$(np \setminus S)/np$ $e \rightarrow (e \rightarrow t)$ $\lambda y^e \lambda x^e ((\text{prendront}^{e \rightarrow (e \rightarrow t)} x) y)$

EXEMPLE 3/5

ANALYSE SYNTAXIQUE

= PREUVE DU CALCUL DE LAMBEK

$$\frac{\frac{\frac{(S/(np \setminus S))/n \quad n}{(S/(np \setminus S))} /_e \quad \frac{(np \setminus S)/np \quad [np]^1}{(np \setminus S)} /_e}{S} /_e \quad \frac{((S/np) \setminus S)/n \quad n}{(S/np) \setminus S} \setminus_e}{S/np} /_i(1) \quad \frac{((S/np) \setminus S)/n \quad n}{(S/np) \setminus S} \setminus_e}{S} \setminus_e$$

Le λ -terme correspondant est :

$\exists \forall = (une \text{ pizza})(\lambda o^e (les \text{ enfants})(prendront \ o))$

EXEMPLE 4/5

REDUCTION \rightarrow FORMULE LOGIQUE

$$\begin{aligned} & (\text{une pizza})(\lambda o (\text{les enfants})(\text{prendront } o)) \\ &= (\lambda Q^{e \rightarrow t} (\exists^{(e \rightarrow t) \rightarrow t} (\lambda x^e (\wedge^{t \rightarrow (t \rightarrow t)} ((\text{pizza}^{e \rightarrow t} x))) (Q x)))) \\ & \quad (\lambda o \forall^{(e \rightarrow t) \rightarrow t} (\lambda w^e (\Rightarrow^{t \rightarrow (t \rightarrow t)} (\text{enfant}^{e \rightarrow t} w) (((\text{prendront}^{e \rightarrow (e \rightarrow t)} w) o)))))) \\ &= (\exists^{(e \rightarrow t) \rightarrow t} (\lambda x^e (\wedge^{t \rightarrow (t \rightarrow t)} ((\text{pizza}^{e \rightarrow t} x)))) \\ & \quad ((\lambda o \forall^{(e \rightarrow t) \rightarrow t} (\lambda w^e (\Rightarrow^{t \rightarrow (t \rightarrow t)} (\text{enfant}^{e \rightarrow t} w) (((\text{prendront}^{e \rightarrow (e \rightarrow t)} w) o)))))) \\ &= (\exists^{(e \rightarrow t) \rightarrow t} (\lambda x^e (\wedge^{t \rightarrow (t \rightarrow t)} ((\text{pizza}^{e \rightarrow t} x)))) \\ & \quad (\forall^{(e \rightarrow t) \rightarrow t} (\lambda w^e (\Rightarrow^{t \rightarrow (t \rightarrow t)} (\text{enfant}^{e \rightarrow t} w) ((\text{prendront}^{e \rightarrow (e \rightarrow t)} w) x)))))) \end{aligned}$$

ce qui s'écrit communément :

$$\exists x. \text{pizza}(x) \wedge \forall w. (\text{enfant}(w) \Rightarrow \text{prendront}(w, x))$$



EXEMPLE 5/5

SANS CALCUL, UNE 2^E ANALYSE

EA

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{(np \setminus S)/np \quad [np]^2}{(np \setminus S)} /_e}{[np]^1} \setminus_e}{S} /_{i(2)} \quad \frac{\frac{((S/np) \setminus S)/n \quad n}{(S/np) \setminus S} \setminus_e}{S} \setminus_{i(1)} \\
 \frac{\frac{(S/(np \setminus S))/n \quad n}{(S/(np \setminus S))} /_e}{S} /_e
 \end{array}$$

On trouve l'autre interprétation :

$$\forall u. enfants(u) \Rightarrow \exists x. pizza(x) \wedge prendront(u, x)$$

COMMENTAIRES

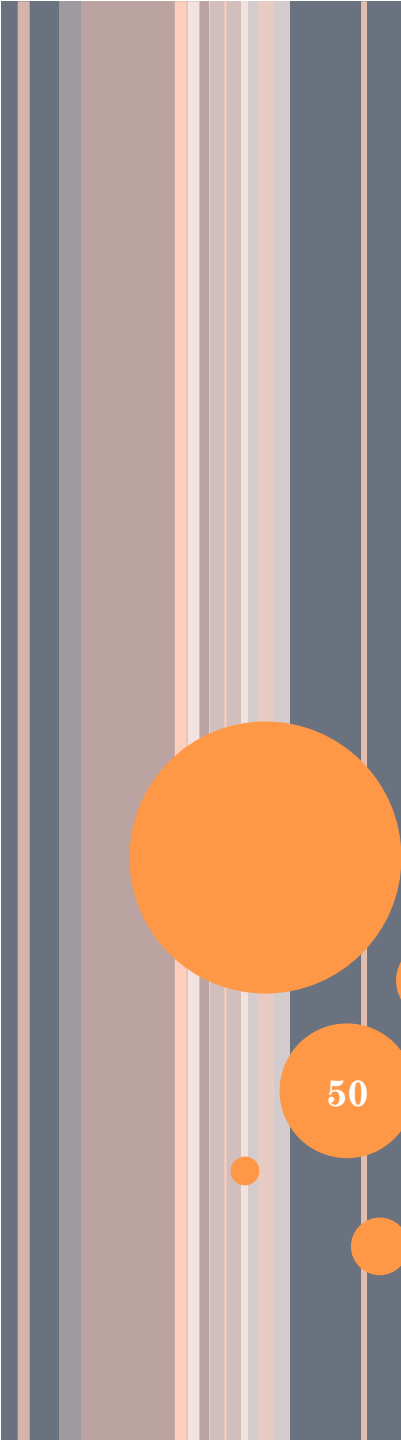
- Analyse syntaxique = **preuve**
- Lambda terme sémantique d'un mot / syntagme = **preuve** incomplète
- Lambda terme sémantique après réduction = formule logique = **preuve** de la correction de la formule logique
- Processus calculable (algorithme) correction assurée de la sémantique (si les informations lexicales soient correctes)
- Compositionnalité du sens: réduction de lambda termes typés = preuves

COMMENTAIRES

- Ça marche: analyseur à large échelle du français
GRAIL (Richard Moot CNRS LIRMM UM)
- Sémantique = formule logique ≠ connotations
- Intégration du sens lexical?

J'ai fini mon livre.

Événement: lire, écrire, ...?



"CONTRARIWISE,
IF IT WAS SO, IT MIGHT BE;
AND IF IT WERE SO, IT WOULD BE;
BUT AS IT ISN'T, IT AIN'T.
THAT'S LOGIC."

LEWIS CARROLL (1832-1898)

Merci de votre attention.

Des questions?

50

QUELQUES RÉFÉRENCES

- **BD LOGICOMIX** de Apostolos Doxiadis, Christos H. Papadimitriou, Alecos Papadatos, and Annie di Donna Vuibert 2010 *Les principaux logiciens du début du XXe sont mis en scène. Pas technique, mais des annexes permettent d'aller plus loin.*
- **Roman** La déesse des petites victoires de Yannick Granec Editions Anne Carrière. 2012 Prix des libraires 2013. *Gödel vu par sa femme. Très bonne reconstitution de la vie scientifique à Vienne puis à Princeton, avec des personnages comme Einstein (l'unique ami de Gödel), von Neuman, Morgenstern, ... Très bon roman per se.*
- **BD** Les rêveurs lunaires, quatre génies qui ont changé l'histoire de Cédric Villani et Edmond Baudoin (Gallimard/ Grasset) 2015 *Science et éthique pendant la 2nde guerre mondiale, avec Turing, les physiciens Heisenberg et Szilard, un général anglais, Hugh Dowding.*
- **Film** de Morten Tyldum avec Benedict Cumberbatch *Imitation games* 2014. *Film populaire sur Turing, aux nombreux prix. Scientifiquement le film se limite à un aspect très restreint de l'œuvre de Turing.*

POUR ALLER PLUS LOIN

- **Essai:** Gilles Dowek Les démonstrations et les algorithmes: introduction à la logique et à la calculabilité. 2010 Ecole polytechnique.
Très bon ouvrage de vulgarisation.
- **Essai:** Pierre Cassou-Noguès Les démons de Gödel : Logique et folie Seuil 2015 *Toujours sur Gödel, plus scientifique que le roman de Yannick Grannec.*
- **Article:** Christian Retoré Logique mathématique et linguistique formelle. In *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, sous la direction de G. Sénizergues, A. Yger. Cassini, à paraître ou <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00607693>