La logique classique en déduction naturelle: énoncé du problème

Richard Moot and Christian Retoré

25 septembre 2008

1 Rappel: les règles de la déduction naturelle

On rappelle les règles de la déduction naturelle:

Il n'y a pas de règle pour la *négation* $\neg X$: celle-ci est une abréviation pour $X \to \perp$

$$\neg X \equiv^{def} X \to \perp$$

1.1 L'implication

1.1.1 Introduction

$$\dfrac{\begin{array}{c} A\Gamma[A]_\alpha\Delta[A]_\alpha \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \to B} \to_i$$

Durant cette règle, zéro, une ou plusieurs occurrences de l'hypothèse A sont annulées (on dit aussi déchargées).

1.1.2 Elimination

$$\dfrac{A \quad A \to B}{B} \to_e$$

1.2 La conjonction

1.2.1 Introduction

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge_i$$

1.2.2 Elimination

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge_e^1$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \wedge_e^2$$

1.3 Le faux

1.3.1 Introduction

Pas de règle d'introduction.

1.3.2 Elimination

La règle d'élimination du faux implante le principe *ex falso quodlibet sequitur* (du faux découle ce qui te plaît). Pour toute formule C, on a:

$$\frac{\perp}{C} \perp$$

1.4 La disjonction

1.4.1 Introduction

$$\frac{A}{A \vee B} \vee_i^1$$

$$\frac{B}{A \vee B} \vee_i^2$$

1.4.2 Elimination

La règle implante le raisonnement par disjonction des cas:

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix} A\Gamma[A]_\alpha\Delta[A]_\alpha \\ \vdots\, d_1 \\ C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} B\Theta[B]_\alpha\Phi[B]_\alpha \\ \vdots\, d_2 \\ C \end{matrix}}{C} \vee_e \alpha$$

Durant cette règle, zéro, une ou plusieurs occurrences de l'hypothèse A sont annulées (on dit aussi déchargées) dans d_1 et, zéro, une ou plusieurs occurrences de l'hypothèse B sont annulées dans d_2.

1.5 La quantification existentielle

1.5.1 Introduction

$$\dfrac{A(t)}{\exists x A(x)} \exists_i$$

1.5.2 Elimination

$$\dfrac{\begin{matrix} A\Gamma[A]_\alpha\Delta[A]_\alpha \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{\exists x A(x)} \vee_e \alpha$$

Cette règle annule un certains nombres d'hypothèses $A(x)$ et ensuite il ne doit plus y avoir d'occurrence de x libre, que ce soit dans une hypothèse non annulée ou dans la conclusion.

1.6 La quantification universelle

1.6.1 Introduction

$$\dfrac{\begin{matrix} \Gamma \\ \vdots \\ A(x \end{matrix}}{\forall x A(x)} \forall_i$$

Pour appliquer cette règle il ne doit pas y d'occurrence de x libre dans les formules de Γ.

1.6.2 Elimination

Pour tout terme t:

$$\frac{\forall x A(x)}{A(t)}\ \forall_e$$

2 Les trois formulations de la logique classique

On ne modifie pas les règles données ci-dessus, mais on ajoute aux axiomes

$$A$$

une famille d'axiomes. Ces axiomes propres font perdre la propriété de la sous formule.

2.1 TND, Tertium Non Datur, tiers exclu

Pour toute formule A:

$$\frac{tnd}{A \vee \neg A}$$

2.2 RAA, Reductio Ad Absurdum, raisonnement par l'absurde

Pour toute formule A:

$$\frac{raa}{\neg\neg A \rightarrow A}$$

On peut aussi le formuler sous la forme d'une règle qui annule un certains nombre d'occurrences de l'hypothèse $\neg A$:

$$\begin{array}{c} A\Gamma[\neg A]_\alpha \Delta[\neg A]_\alpha \\ \vdots \\ \dfrac{\perp}{A}\ raa \end{array}$$

Cela revient au même, il suffit d'utiliser la règle réversible $\rightarrow_i$ qui conduit à $\neg\neg A$ qui combiné avec l'axiome RAA produit bien A.

2.3 Loi de Pierce

Pour toutes formules P et Q:

$$\frac{Pierce}{((P \to Q) \to P) \to P}$$

3 Equivalence des trois formulations de la logique classique

Montrer que les trois formulations de la logique classique en déduction naturelle (raisonnement par l'absurde, tiers exclu, loi de Pierce) sont équivalentes.