La « non-non » traduction de Gödel-Kolmogorov entre logique classique (NK) et logique intuitionniste (NJ)

Richard Moot and Christian Retoré

28 novembre 2007

1 Traduction

On définit inductivement la non-non traduction $F^{\neg\neg}$ d'une formule F

$$\begin{aligned}
\bot^{\neg\neg} &= \bot \\
at^{\neg\neg} &= \neg\neg at \\
(A \wedge B)^{\neg\neg} &= A^{\neg\neg} \wedge B^{\neg\neg} \\
(A \rightarrow B)^{\neg\neg} &= A^{\neg\neg} \rightarrow B^{\neg\neg} \\
(\forall x.A)^{\neg\neg} &= \forall x.A^{\neg\neg} \\
(A \vee B)^{\neg\neg} &= \neg\neg(A^{\neg\neg} \vee B^{\neg\neg}) \\
(\exists x.A)^{\neg\neg} &= \neg\neg\exists x.A^{\neg\neg}
\end{aligned}$$

NJ désigne la déduction naturelle usuelle, intuitionniste.

NK désigne la déduction nautrelle classique, c.-à-d. NJ enrichie du tiers exclu (*tertium non datur*), ou du raisonnement par l'absurde (*reductio ad absurdum*), qui sont équivalents.

Remarque : on a $(\neg A)^{\neg\neg} = \neg(A^{\neg\neg})$ puisque $\bot^{\neg\neg} = \bot$ et $\neg A = (A \rightarrow \bot)$ avec la traduction de l'implication.

2 Lemme : $\neg\neg F^{\neg\neg} \vdash^{\mathbf{NJ}} F^{\neg\neg}$

Par induction sur les formules obtenues par la traduction $^{\neg\neg}$.

2.1 F est $\bot$

Il faut montrer que $\neg\neg\bot \vdash \bot$:

$$\dfrac{\neg\neg\bot \qquad \dfrac{[\bot]^1}{\neg\bot}\,\neg_i(1)}{\bot}\,\neg_e$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\neg A \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad [\neg A]^1}{\bot}\,\neg_e}{\neg\neg A}\,\neg_i(1)}{\bot}\,\neg_e}{\neg A}\,\neg_i(2)$$

FIG. 1 – La preuve $d(A)$)

2.2 Si F est un atome at

Il faut montrer que $\neg\neg\neg\neg at \vdash \neg\neg at$. On utilise la preuve $d(A)$ de la figure avec $A = \neg at$.

2.3 Si F est $X \vee Y$

Il faut montrer que $\neg\neg\neg\neg(X^{\neg\neg} \vee Y^{\neg\neg}) \vdash \neg\neg(X^{\neg\neg} \vee Y^{\neg\neg})$. On utilise la preuve $d(A)$ de la figure avec $A = \neg(X^{\neg\neg} \vee Y^{\neg\neg})$.

2.4 Si F est $\exists x\, P$

Il faut montrer que $\neg\neg\neg\neg(\exists x\, P^{\neg\neg}) \vdash \neg\neg(\exists x\, P)$. On utilise la preuve $d(A)$ de la figure avec $A = \neg(\exists x\, P^{\neg\neg})$.

2.5 Si F est $A \rightarrow B$

Il faut montrer que $\neg\neg(A^{\neg\neg} \rightarrow B^{\neg\neg}) \vdash (A^{\neg\neg} \rightarrow B^{\neg\neg})$ et on peut supposer par hypothèse d'induction (HI) que $\neg\neg A^{\neg\neg} \vdash A^{\neg\neg}$ (qui ne servira pas) et $\neg\neg B^{\neg\neg} \vdash B^{\neg\neg}$ (effectivement utilisé).

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\neg\neg(A^{\neg\neg} \rightarrow B^{\neg\neg}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A^{\neg\neg}]^3 \quad [A^{\neg\neg} \rightarrow B^{\neg\neg}]^1}{B^{\neg\neg}}\,\rightarrow_e \qquad [\neg B^{\neg\neg}]^2}{\bot}\,\neg_e}{\neg(A^{\neg\neg} \rightarrow B^{\neg\neg})}\,\neg_i(1)}{\bot}\,\neg_e}{\neg\neg B^{\neg\neg}}\,\neg_i(2) \\ \vdots\; HI \\ B^{\neg\neg}\end{array}}{A^{\neg\neg} \rightarrow B^{\neg\neg}}\,\rightarrow_i (3)$$

2.6 Si F and $A \wedge B$

Il faut montrer que $\neg\neg(A^{\neg\neg} \wedge B^{\neg\neg}) \vdash (A^{\neg\neg} \wedge B^{\neg\neg})$ et on peut supposer par hypothèse d'induction (HI) que $\neg\neg A^{\neg\neg} \vdash A^{\neg\neg}$ (effectivement utilisé) et $\neg\neg B^{\neg\neg} \vdash B^{\neg\neg}$ (effectivement utilisé).

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A^{\neg\neg}\wedge B^{\neg\neg}]^1}{A^{\neg\neg}}\wedge_e \quad [\neg A^{\neg\neg}]^2}{\bot}\neg_e}{\neg(A^{\neg\neg}\wedge B^{\neg\neg})}\neg_i(1) \quad \neg\neg(A^{\neg\neg}\wedge B^{\neg\neg})}{\bot}\neg_e}{\neg\neg A^{\neg\neg}}\neg_i(2)\\ \vdots\ HI\\ A^{\neg\neg}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A^{\neg\neg}\wedge B^{\neg\neg}]^3}{B^{\neg\neg}}\wedge_e \quad [\neg B^{\neg\neg}]^4}{\bot}\neg_e}{\neg(A^{\neg\neg}\wedge B^{\neg\neg})}\neg_i(3) \quad \neg\neg(A^{\neg\neg}\wedge B^{\neg\neg})}{\bot}\neg_e}{\neg\neg B^{\neg\neg}}\neg_i(4)\\ \vdots\ HI\\ B^{\neg\neg}\end{array}}{A^{\neg\neg}\wedge B^{\neg\neg}}\wedge_i$$

2.7 Si F est $\forall x\, A$

Il faut montrer que $\neg\neg(\forall x\, A^{\neg\neg}) \vdash (\forall x\, A^{\neg\neg})$ et on peut supposer par hypothèse d'induction (HI) que $\neg\neg A^{\neg\neg} \vdash A^{\neg\neg}$ (effectivement utilisé).

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\neg\neg\forall x.A^{\neg\neg} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x.A^{\neg\neg}]^1}{A^{\neg\neg}}\forall_e \quad [\neg A^{\neg\neg}]^2}{\bot}\neg_e}{\neg\forall x.A^{\neg\neg}}\neg_i(1)}{\bot}\neg_e}{\neg\neg A^{\neg\neg}}\neg_i(2)\\ \vdots\ HI\\ A^{\neg\neg}\end{array}}{\forall x.A^{\neg\neg}}\forall_i$$

Notez que l'hypothèse 2 est annulée au moment de l'application de la règle $\forall_i$.

3 Théorème $\Gamma^{\neg\neg} \vdash^{\mathbf{NJ}} F^{\neg\neg}$ si et seulement si $\Gamma \vdash^{\mathbf{NK}} F$

3.1 Si $\Gamma^{\neg\neg} \vdash^{\mathbf{NJ}} F^{\neg\neg}$ alors $\Gamma \vdash^{\mathbf{NK}} F$

Si $\Gamma^{\neg\neg} \vdash^{\mathrm{NJ}} F^{\neg\neg}$ est derivable dans NJ, il l'est aussi dans NK(les règles de NJsont des règles de NK).

Comme NKnous permet d'ajouter et supprimer des doubles négations, on a pour toute formule A d'une part $A \vdash^{\mathrm{NK}} A^{\neg\neg}$ et d'autre part $A^{\neg\neg} \vdash^{\mathrm{NK}} A$ (ce qui se vérifie aisément sur la taille de la formule) et on peut grâce à cela construire la preuve en NK.

$$\begin{array}{c} A_1^{\neg\neg} \quad \dots \quad A_n^{\neg\neg} \\ \vdots\ \mathrm{NJ} \\ F^{\neg\neg} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} A_1^{\neg\neg} \quad \dots \quad A_n^{\neg\neg} \\ \vdots\ \mathrm{NK} \\ F^{\neg\neg} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} A_1 \\ \vdots\ \mathrm{NK} \\ A_1^{\neg\neg} \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} A_n \\ \vdots\ \mathrm{NK} \\ A_n^{\neg\neg} \end{array} \\ \vdots\ \mathrm{NK} \\ F^{\neg\neg} \\ \vdots\ \mathrm{NK} \\ F \end{array}$$

3.2 $\Gamma \vdash^{\mathbf{NK}} F$ alors $\Gamma^{\neg\neg} \vdash^{\mathbf{NJ}} F^{\neg\neg}$

Cela se montre par induction sur la preuve en NK. Notez qu'on construit toujours une preuve en NJ avec les mêmes occurrences de variables libres.

3.2.1 La preuve est de hauteur 0 et c'est un axiome $A \vdash^{\mathbf{NK}} A$

$$A \quad \rightsquigarrow \quad A^{\neg\neg}$$

3.2.2 La preuve est de hauteur 0 et c'est une application du tiers exclu $\vdash^{\mathbf{NK}} A \vee \neg A$

Rappelons que $(\neg A)^{\neg\neg} = \neg(A^{\neg\neg})$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A^{\neg\neg}]^1}{A^{\neg\neg} \vee \neg A^{\neg\neg}} \vee_i \qquad [\neg(A^{\neg\neg} \vee \neg A^{\neg\neg})]^2}{\bot} \neg_e}{\neg A^{\neg\neg}} \neg_i(1)}{A^{\neg\neg} \vee \neg A^{\neg\neg}} \vee_i \qquad [\neg(A^{\neg\neg} \vee \neg A^{\neg\neg})]^2}{\dfrac{\bot}{\neg\neg(A^{\neg\neg} \vee \neg A^{\neg\neg})} \neg_i(2)} \neg_e$$

3.2.3 La preuve est de hauteur 0 et c'est reductio ad absurdum $\vdash^{\mathbf{NK}} (\neg\neg A) \to A$

Il faut montrer que $\vdash (\neg\neg A)^{\neg\neg} \to A^{\neg\neg}$ mais comme $\neg A = (A \to \bot)$ on a $(\neg\neg A)^{\neg\neg} = \neg\neg A^{\neg\neg}$. Il faut donc montrer que $\vdash \neg\neg(A^{\neg\neg}) \to A^{\neg\neg}$: c'est le lemme démontré au paragraphe 2.

3.2.4 La preuve se termine par la règle $\bot_e$

On peut appliquer l'hypothèse d'induction (HI) à la preuve sans cette dernière règle, en utilisant le fait que $\bot^{\neg\neg} = \bot$.

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{A} \bot_e \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma^{\neg\neg} \\ \vdots\, HI \\ \bot\end{matrix}}{A^{\neg\neg}} \bot_e$$

3.2.5 La preuve se termine par la règle $\to_e$

On peut appliquer l'hypothèse d'induction (HI) aux deux preuves obtenues par suppression de cette dernière règle.

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Delta \\ \vdots \\ A \to B\end{matrix}}{B} \to_e \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma^{\neg\neg} \\ \vdots\, HI \\ A^{\neg\neg}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta^{\neg\neg} \\ \vdots\, HI \\ A^{\neg\neg} \to B^{\neg\neg}\end{matrix}}{B^{\neg\neg}} \to_e$$

3.2.6 La preuve se termine par la règle $\rightarrow_i$

On peut appliquer l'hypothèse d'induction (HI) à la preuve obtenue par suppression de cette dernière règle.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \quad [A]^k \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \rightarrow B} \rightarrow_i (k) \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma^{\neg\neg} \quad [A^{\neg\neg}]^k \\ \vdots\, HI \\ B^{\neg\neg}\end{array}}{A^{\neg\neg} \rightarrow B^{\neg\neg}} \rightarrow_i (k)$$

3.2.7 La preuve se termine pas la règle $\wedge_e$

On peut appliquer l'hypothèse d'induction (HI) à la preuve obtenue par suppression de cette dernière règle.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ A \wedge B\end{array}}{A} \wedge_e \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma^{\neg\neg} \\ \vdots\, HI \\ A^{\neg\neg} \wedge B^{\neg\neg}\end{array}}{A^{\neg\neg}} \wedge_e$$

3.2.8 La preuve se termine pas la règle $\wedge_i$

On peut appliquer l'hypothèse d'induction (HI) aux deux preuves obtenues par suppression de cette dernière règle.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \wedge B} \wedge_i \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma^{\neg\neg} \\ \vdots\, HI \\ A^{\neg\neg}\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta^{\neg\neg} \\ \vdots\, HI \\ B^{\neg\neg}\end{array}}{A^{\neg\neg} \wedge B^{\neg\neg}} \wedge_i$$

3.2.9 La preuve se termine par la règle $\vee_e$

On peut appliquer l'hypothèse d'induction (HI) aux trois preuves obtenues par suppression de cette dernière règle. On utilise aussi le lemme du paragraphe 2.

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Delta\quad [A]^k\\ \vdots\\ C\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Theta\quad [B]^k\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\,\vee_e \qquad\rightsquigarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A^{\neg\neg}\vee B^{\neg\neg}]^l\qquad \begin{matrix}\Delta^{\neg\neg}\quad [A^{\neg\neg}]^k\\ \vdots\ HI\\ C^{\neg\neg}\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Theta^{\neg\neg}\quad [B^{\neg\neg}]^k\\ \vdots\ HI\\ C^{\neg\neg}\end{matrix}}{C^{\neg\neg}}\,\vee_e \qquad [\neg C^{\neg\neg}]^m}{\bot}\,\neg_e}{\neg(A^{\neg\neg}\vee B^{\neg\neg})}\,\neg_i(l)\qquad \begin{matrix}\Gamma^{\neg\neg}\\ \vdots\ HI\\ \neg\neg(A^{\neg\neg}\vee B^{\neg\neg})\end{matrix}}{\bot}\,\neg_e}{\begin{matrix}\neg\neg C^{\neg\neg}\\ \vdots\ Lemme\\ C^{\neg\neg}\end{matrix}}\,\neg_i(m)$$

3.2.10 La preuve se termine par la règle $\vee_i$

On peut appliquer l'hypothèse d'induction (HI) à la preuve obtenue par suppression de cette dernière règle.

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\end{matrix}}{A\vee B}\,\vee_i \qquad\rightsquigarrow\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma^{\neg\neg}\\ \vdots\ HI\\ A^{\neg\neg}\end{matrix}}{A^{\neg\neg}\vee B^{\neg\neg}}\,\vee_i \qquad [\neg(A^{\neg\neg}\vee B^{\neg\neg})]^l}{\bot}\,\neg_e}{\neg\neg(A^{\neg\neg}\vee B^{\neg\neg})}\,\neg_i(l)$$

3.2.11 La preuve se termine par la règle $\forall_e$

On peut appliquer l'hypothèse d'induction (HI) à la preuve obtenue par suppression de cette dernière règle.

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ \forall x.A\end{matrix}}{A[x:=t]}\,\forall_e \qquad\rightsquigarrow\qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma^{\neg\neg}\\ \vdots\ HI\\ \forall x.A^{\neg\neg}\end{matrix}}{A[x:=t]^{\neg\neg}}\,\forall_e$$

3.2.12 La preuve se termine par la règle $\forall_i$

On peut appliquer l'hypothèse d'induction (HI) à la preuve obtenue par suppression de cette dernière règle.

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\end{matrix}}{\forall x.A}\,\forall_i \qquad\rightsquigarrow\qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma^{\neg\neg}\\ \vdots\ HI\\ A^{\neg\neg}\end{matrix}}{\forall x.A^{\neg\neg}}\,\forall_i$$

3.2.13 La preuve se termine par la règle $\exists_e$

On peut appliquer l'hypothèse d'induction (HI) aux deux preuves obtenues par suppression de cette dernière règle. On utilise aussi le lemme du paragraphe 2.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \exists x.A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta \quad [A]^k\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\,\exists_e(k) \quad\rightsquigarrow\quad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\bot}{\neg\neg C^{\neg\neg}}\,\neg_i(m)}{} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x.A^{\neg\neg}]^l \qquad \begin{array}{c}\Delta^{\neg\neg} \quad [A^{\neg\neg}]^k\\ \vdots\ HI\\ C^{\neg\neg}\end{array}}{C^{\neg\neg}}\,\exists_e(k) \qquad [\neg C]^m}{\bot}\,\neg_e}{\neg\exists x.A^{\neg\neg}}\,\neg_i(l) \qquad \begin{array}{c}\Gamma^{\neg\neg}\\ \vdots\ HI\\ \neg\neg\exists x.A^{\neg\neg}\end{array}}{\dfrac{\bot}{\neg\neg C^{\neg\neg}}\,\neg_i(m)}\,\neg_e\\
\vdots\ Lemme\\
C^{\neg\neg}
\end{array}$$

3.2.14 La preuve se termine par la règle $\exists_e$

On peut appliquer l'hypothèse d'induction (HI) à la preuve obtenue par suppression de cette dernière règle.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ A[x := t]\end{array}}{\exists x.A}\,\exists_i \quad\rightsquigarrow\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma^{\neg\neg}\\ \vdots\ HI\\ A[x := t]^{\neg\neg}\end{array}}{\exists x.A^{\neg\neg}}\,\exists_i \qquad [\neg\exists x.A^{\neg\neg}]}{\bot}\,\neg_e}{\neg\neg\exists x.A^{\neg\neg}}\,\neg_i(l)$$