LOGIQUE DU PREMIER ORDRE: LANGAGES, MODÈLES, PREUVES

(PETITE ÉCOLE SUR LES FAISCEAUX EN LOGIQUE ET EN GÉOMÉTRIE)

1. Calcul propositionnel

1.1. **Langage.** On se donne un ensemble P (généralement dénombrable) de symboles propositionnels. L'ensemble des propositions $\mathcal{P}$ est défini comme la clôture par les connecteurs logiques de P :

- Un élément de P est une proposition.
- Si p est une proposition, $\neg p$ aussi.
- Si p et q sont des propositions, alors $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$ et $p \Leftrightarrow q$ sont aussi des propositions.

1.2. **Modèle.** Un modèle (on dit aussi valuation, voire interprétation) est une application v de P dans $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ (en fait toute autre algèbre de Boole conviendrait). Celle-ci s'étend de manière unique à $\mathcal{P}$ tout entier, en exigeant que :

$$v(\neg(p)) = \overline{(v(p))},$$
$$v(p \vee q) = \sup(v(p), v(q)),$$
$$v(p \wedge q) = \inf(v(p), v(q)),$$
$$v(p \Rightarrow q) = v(\neg(p) \vee q)$$
$$v(p \Leftrightarrow q) = v((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$$

On dit qu'une proposition p est valide pour v dans si $v(p) = 1$ (l'élément maximum de l'algèbre de Boole). Une proposition p est dite universellement valide si pour toute valuation v on a $v(p) = 1$.

Un ensemble de propositions A est dit satisfiable s'il existe une valuation v telle que $\forall p \in A \quad v(p) = 1$. On ne peut dire $v(\wedge_{p \in A} p) = 1$ car v n'est pas définie pour des objets infinis.

Théorème 1 (Compacité)**.** *Soit A un ensemble de propositions. A est consistant si et seulement si toute partie* finie *de A l'est.*

Démonstration. On considère la topologie discrète sur $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, et la topologie produit sur $V = \Pi_{p \in P} B_p$ avec $B_p = \mathbb{B}$ Pour toute formule, l'ensemble des valuations qui la rendent vraie est un ouvert fermé de V (par induction sur la formule). Si l'intersection des v tel que $v(F) = 1$ pour toute formule F de A était vide, alors l'intersection d'un nombre fini d'entres elle serait vide (V est compact), ce qui contredit l'hyptohèse selon laquelle toute partie finie de A est satisfiable. $\square$

1.3. **Démonstrations formelles : déduction naturelle, calcul des séquents.** De prime abord, ces systèmes peuvent sembler barbares. Leur lourdeur vient du fait qu'ils raisonnent non sur des formules mais sur des implications, c.-à-d.sous des formules sous hypothèses. Voici quelques raisons pour les préférer aux système de Hilbert :

- Il y a dans ces système une notion de démonstration normale, c.-à-d.la plus élémentaire possible (sans lemmes généraux).
- Toute formule apparaissant dans une démonstration formelle est sous formule d'une hypothèse ou d'une conclusion.
- Certaines variantes sont réversibles.
- Dans le cas propositionnel un algorithme très simple donne soit une démonstration soit une valuation qui réfute la formule.
- Ils s'adaptent aisément à des logiques variées.
- Ils n'utilisent pas la substitution (délicate à définir et à programmer).
- Ils ont été introduits pour établir la cohérence de l'arithmétique par Gentzen en 1934 (moyennant une induction d'ordre ϵ_0 !).

– Sociologiquement ils sont bien établis dans la communauté théorie de la démonstration (étudiant les propriétés des démonstrations) car ils sont relativement bien structurés et ils sont les seuls utilisés dans la recherche semi-automatique de démonstrations.

Un séquent est constitué de deux suites de formules situées de part et d'autre du signe $\vdash$ ("thèse"). On peut se convaincre aisément d'après les règles qu'un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots B_p$ est démontrable si et seulement si $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \vdash B_1 \vee \cdots \vee B_p$ est universellement valide, et c'est ainsi qu'l faut les comprendre. Les A_i sont appelées les hypothèses du séquents et les B_j les conclusions du séquent. Un cas particulier important est celui où les séquents ont une formule en partie droite (ou au plus une suivant la variante considérée), on parle alors de séquents intuitionnistes.

Une formule C est dite démontrable ou dérivable quand on a une démonstration formelle de $\vdash C$

Dans les règles, majuscules grecques désignent des suites de formules.

Un premier lot de règles est commun à tous les systèmes présentés :

Règles structurelles

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash \Theta}\, E_g \qquad \frac{\Theta \vdash \Gamma, A, B, \Delta}{\Theta \vdash \Gamma, B, A, \Delta}\, E_d$$

$$\frac{\Delta \vdash \Theta}{A, \Delta \vdash \Theta}\, A_g \qquad \frac{\Theta \vdash \Gamma}{\Theta \vdash \Gamma, A}\, A_d$$

$$\frac{\Gamma, A, A, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, A, \Delta \vdash \Theta}\, C_g \qquad \frac{\Theta \vdash \Gamma, A, A, \Delta}{\Theta \vdash \Gamma, A, \Delta}\, C_d$$

On notera simplement que les règles droites ne peuvent plus s'appliquer s'il n'y a qu'une formule à droite.

1.3.1. *Déduction naturelle.* Ce système manipule des séquents intuitionistes et admet une représentation en arbre assez naturelle (d'où son nom).

Règles logiques

$\dfrac{\Theta \vdash (A \wedge B)}{\Theta \vdash A}\, \wedge_e \quad \dfrac{\Theta \vdash (A \wedge B)}{\Theta \vdash B}\, \wedge_e$	$\dfrac{\Theta \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Theta, \Delta \vdash (A \wedge B)}\, \wedge_d$
$\dfrac{\Theta \vdash (A \vee B) \quad A, \Gamma \vdash C \quad B, \Delta \vdash C}{\Theta, \Gamma, \Delta \vdash C}\, \vee_e$	$\dfrac{\Theta \vdash A}{\Theta \vdash (A \vee B)}\, \vee_d \quad \dfrac{\Theta \vdash B}{\Theta \vdash (A \vee B)}\, \vee_d$
$\dfrac{\Theta \vdash A \quad \Gamma \vdash A \Rightarrow B}{\Gamma, \Theta \vdash B}\, \Rightarrow_e$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash (A \Rightarrow B)}\, \Rightarrow_d$
$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \mathrm{C}}\, \bot_e$	

L'axiome est$A \vdash A$ (si A alors A...) pour tout A. La négation $\neg A$ est considérée comme une abréviation pour $A \Rightarrow \bot$.

Cela ne se voit pas mais ce système est naturellement intuitionniste, il faut lui ajouter le tiers exclus $\vdash (A \vee \neg A)$ pour tout A pour obtenir la logique classique — on peut aussi ajouter la contraposée ou le raisonnement par l'absurde, cela revient au même.

1.3.2. *Calcul des séquents.* On travaille sur des séquents avec plusieurs conclusions et plusieurs hypothèses.

On utilise les règles structurelles données ci-dessus.

L'axiome est $A \vdash A$ pour tout A.

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, (A \wedge B), \Delta \vdash \Theta} \wedge_g \qquad \frac{\Theta \vdash \Gamma, A, \Delta \qquad \Theta \vdash \Gamma, B, \Delta}{\Theta \vdash \Gamma, (A \wedge B), \Delta} \wedge_d$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Theta \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, (A \vee B), \Delta \vdash \Theta} \vee_g \qquad \frac{\Theta \vdash \Gamma, A, B, \Delta}{\Theta \vdash \Gamma, (A \vee B), \Delta} \vee_d$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Theta \qquad B, \Gamma, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, (A \Rightarrow B), \Delta \vdash \Theta} \Rightarrow_g \qquad \frac{A, \Gamma \vdash B, \Delta, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, (A \Rightarrow B), \Theta} \Rightarrow_d$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Theta}{\Gamma, (\neg A), \Delta \vdash \Theta} \neg_g \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, (\neg A), \Theta} \neg_d$$

On peut ajouter la règle dite de coupure (qui correspond grosso modo à l'utilisation d'un lemme) :

$$\frac{\Theta \vdash \Gamma, A \qquad A, \Phi \vdash \Psi}{\Theta, \Phi \vdash \Gamma, \Psi} \wedge_d$$

Théorème 2 (Gentzen)**.** *Toute démonstration peut se transformer en une démonstration sans coupure dans la quelle toute formule est sous formule du séquent conclusion. On en déduite que le calcul propositionnel est décidable.*

Proposition 3. *Le calcul des séquent ci-dessus est équivalent à la variante suivante : la seule règle structurelle et l'échange, il n'y a pas de coupure et l'axiome est $\Theta \vdash \Phi$ pour tous les Θ et Φ ayant une variable propositionnelle en commun (d'où sa décidabilité).*

Attention , le mot *complétude* a deux sens en logique :
- un système déductif est complet par rapport à une notion de modèle s'il permet de déduire toutes les propriétés vraies dans tout modèle.
- une théorie T est dite complète si, pour tout énoncé F du langage on a $T \vdash F$ ou $T \vdash \neg F$.

1.4. **Complétude.**

Théorème 4 (Complétude du calcul propositionnel)**.** *Un séquent est démontrable si et seulement s'il est universellement valide.*

Démonstration. Cela vient du fait que les règles sont réversibles. On applique l'algorithme simple qui consiste, dans la variante introduite par a proposition précédente, à choisir une formule du séquent et à la décomposer. In fine, les séquent ne comporte que des symboles propositionnels. Le séquent conclusion est démontrable si et seulement si les séquents indécomposables auquel on parvient sont des tautologies, c.-à-d.s'ils ont la même lettre en partie doite et en partie gauche. Si c'est le cas, le séquent conclusion est démontrable. Sinon, un séquent sans symbole commun entre la partie gauche et la partie droite est aisément réfutable par la valuation $v(p) = 1$ si p apparaît à gauche et $v(q) = 0$ si q apparaît à droite. Cela donne une valuation qui rend la conclusion fausse. $\square$

2. Langage du premier ordre

2.1. **Termes.** On se donne :
- des constantes (qui seront interprétées par des individus fixés)
- des symboles de fonctions ayant chacun une arité ≥ 1 (un nombre d'arguments fixé)
- des variables (qui varient dans l'ensemble des individus de l'interprétation).

Les termes sont définis comme suit :
- une variable est un terme
- une constante est un terme
- si f est un symbole fonctionnel d'arité n et si $t_1, \ldots, t_n$ sont n termes, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme.

2.2. **Calcul des prédicats.** On se donne un ensemble de prédicats (appelés aussi symboles de relations) chacun étant muni d'une arité ≥ 0, c.-à-d.de son nombre d'arguments. Par exemple T d'arité 2, S d'arité 3, P d'arité 0 et U d'arité 1.

2.2.1. *Formules atomiques.* Soit R un prédicat d'arité n, et soient n termes $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Alors l'expression $R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule atomique.

Si R est un prédicat d'arité 0, R est une formule atomique — en fait R est un proposition atomique.

2.2.2. *Formules.* Les formules sont obtenues à partir des formules atomiques comme suit :
- Une formule atomique est une formule.
- Si F et G sont deux formules alors :
  - $(F \wedge G)$ est une formule
  - $(F \vee G)$ est une formule
  - $(F \Rightarrow G)$ est une formule
- Si F est une formule alors $(\neg F)$ est une formule.
- Si F est une formule et si x est une variable, alors
  - $(\forall x \quad F)$ est une formule.
  - $(\exists x \quad F)$ est une formule.

2.2.3. *Occurrences libres et liées d'une variable dans une formule.* C'est particulièrement fastidieux à définir, les quantificateurs lient des variables comme le font les symboles $\int_{x=a}^{b} f(x,t)dx$ ou $\Sigma_n q^n$. Un exemple devrait suffire :

$$(\forall a(F(g(a)) \Rightarrow (H(f(b,a),a) \vee K(g(c))))) \wedge (\exists b \quad (G(f(a),b) \vee F(g(b))))$$

Et il est toujours plus prudent d'utiliser des alphabets différents pour les variables libres et liées, et un nom de variable par quantificateur.

$$(\forall x(F(g(x)) \Rightarrow (H(f(b,x),x) \vee K(g(c))))) \wedge (\exists y \quad (G(f(a),y) \vee F(g(y))))$$

2.3. **Modèles du calcul des prédicats.** Comme pour le calcul des propositions, on va définir l'interprétation d'une formule en fonction de l'interprétation des formules élémentaires. Pour qu'une formule devienne vraie ou fausse (valle 0 ou 1), il faut non seulement dire comment s'interprètent les prédicats et les symboles de fonctions, (ce qui est l'analogue d'interpréter les propositions pour le calcul propositionnel) mais aussi ce que valent les variables : en effet les formules peuvent contenir des variables libres, et on a besoin de connaître leur valeur pour que la formule devienne vraie ou fausse. Bien sûr la valeur des variables liées n'intervient en rien dans le calcul de la valeur d'une formule.

Par exemple pour connaître la valeur de $P(x,y)$ il faut non seulement connaître la signification de P dans le modèle, mais aussi la valeur de x et de y. Dans la formule $\exists x \quad P(x,y)$ il faut également connaître la valeur de y (mais celle de x n'a aucune importance). Cependant, comme la valeur de $\exists y \quad P(x,y)$ va être définie en fonction de la valeur de $P(x,y)$, on fera aussi intervenir la valeur de x, ou plus précisément les valeurs de $P(x,y)$ pour toutes les valeurs de x.

On va définir $[F]_{I,A}$ la valeur d'une formule F en fonction d'une interprétation I et d'une assignation des variables A.

- Une assignation est simplement une fonction des variables dans les éléments du domaine d'interprétation. On dira qu'une assignation A' est une variante en x de l'assignation A si $A'(z) = A(z)$ pour toute variable z autre que x.
- Une interprétation I est la donnée :
  - d'un domaine D_I (un ensemble)
  - d'un élément a_I du domaine D pour chaque constante
  - d'une fonction f_i de D^n dans D pour tout symbole de fonction f d'arité n.
  - d'une relation n-aire $R_I \subset D^n$ pour tout prédicats à n arguments.

Si I et A sont fixées, toute formule atomique prend la valeur 0 ou 1, selon la définition formelle suivante, qui suit l'intuition. Étant donnée une interprétation et une assignation des variables, l'interprétation de toute formule, qui sera 0 ou 1, est définie ainsi :

- La valeur d'une formule obtenue à partir d'une ou deux formule par un connecteur $(\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow)$ s'obtient comme dans le cas propositionnel. On note $\widetilde{\star}$ l'opération sur 0 et 1 correspondant au connecteur $\star$ — par exemple $0\widetilde{\wedge}1 = 0$, $\widetilde{\neg}0 = 1$, etc.
  - $[(X \wedge Y)]_{I,A} = [X]_{I,A}\widetilde{\wedge}[Y]_{I,A}$
  - $[(X \vee Y)]_{I,A} = [X]_{I,A}\widetilde{\vee}[Y]_{I,A}$
  - $[(X \Rightarrow Y)]_{I,A} = [X]_{I,A}\widetilde{\Rightarrow}[Y]_{I,A}$
- La valeur de $[((\forall x \quad F)]_{I,A}]$ ou de $[((\exists x) \quad F)]_{I,A}]$ dépend bien sûr de la valeur de cette même formule pour la même interprétation *pour les autres assignations* A'. Plus précisément on dira qu'une assignation A' est une variation en x d'une assignation A si $A(u) = A'(u)$ pour toute variable u différente de x.
  - $[((\forall x) \quad F)]_{I,A}] = 1$ si et seulement si $[((\forall x) \quad F)]_{I,A'}] = 1$ pour toute assignation A' qui soit une variation en x de A — c.-à-d.lorsque quelle que soit la valeur assignée à la variable x on obtient une formule vraie.
  - $[((\exists x) \quad F)]_{I,A}] = 1$ si et seulement si $[((\exists x) \quad F)]_{I,A'}] = 1$ pour au moins une assignation A' qui soit une variation en x de A — c.-à-d.lorsqu'il existe une valeur assignée à la variable x qui donne une formule vraie.

On remarque que la valeur de $[((\forall x) \quad F)]_{I,A}]$ ou $[((\exists x) \quad F)]_{I,A}] = 1$ ne dépend pas de $A(x)$. Par suite la valeur de $[G]_{I,A}$ ne dépend pas de $A(x)$ lorsque x est une variable liée. Si G est une formule sans variable liée, alors $[G]_{I,A}$ ne dépend pas de A (conformément à l'intuition) et par conséquent on écrira $[G]_I$.

2.4. **Systèmes déductifs.**

2.4.1. *Déduction naturelle.*

Les règles structurelles et logiques sont inchangées, mais les règles suivantes, correspondant aux quantificateurs sont ajoutées.

On notera la restriction dans les règles $\forall_d$ et $\exists_g$.

Règles pour les quantificateurs

$$\frac{\Gamma \vdash (\forall x \quad A(x))}{\Gamma \vdash A(t)}\,\forall_e \qquad\qquad \frac{\Theta \vdash A(y)}{\Theta \vdash (\forall x \quad A)}\,\forall_d \text{ plus de } y \text{ libre ensuite}$$

$$\frac{\Gamma \vdash (\exists x \quad A(x)) \quad A(y), \Delta \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C}\,\exists_g \text{ plus de } y \text{ libre ensuite} \qquad\qquad \frac{\Theta \vdash A(t/x)}{\Theta \vdash (\exists x \quad A(x))}\,\exists_d$$

Les règles $\forall_e$ et $\exists_d$ sont limpides.

Pour $\forall_d$ la règle et sa restriction se comprennent bien : pour déduire que ce qu'on a montré vaut pour tout y, il faut bien ne pas être en train de supposer des propriétés particulières de y, ce qui correspond à la présence d'occurrence libres de y.

La règle $\exists_e$ lui ressemble beaucoup : si sous l'hypothèse $A(y)$ on a une certaine propriété, et qu'on ne suppose rien d'autre sur y (pas d'occurrence libre de x) alors $\exists x\ A(x)$ suffit pour obtenir le séquent démontré.

2.4.2. *Calcul des séquents.* Les règles données ici permettent de se passer des règles structurelles et de travailler avec comme axiomes les séquents $\Theta \vdash \Phi$ contenant une formule commune.

De manière équivalente, on peut travailler avec l'axiome $A \vdash A$ pour tout A et les règles structurelles.

Règles pour les quantificateurs

$$\frac{\Gamma, \underline{A(t/x)}, (\forall x \quad A(x)), \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, (\forall x \quad A(x)), \Delta \vdash \Theta} \forall_g \qquad \frac{\Theta \vdash \Gamma, A(y/x), \Delta}{\Theta \vdash \Gamma, (\forall x \quad A), \Delta} \forall_d \text{ plus de } y \text{ libre ensuite}$$

$$\frac{\Gamma, A[y/x], \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, (\exists x \quad A), \Delta \vdash \Theta} \exists_g \text{ plus de } y \text{ libre ensuite} \qquad \frac{\Theta \vdash \Gamma, \underline{A[t/x]}, (\exists x \quad A), \Delta}{\Theta \vdash \Gamma, (\exists x \quad A), \Delta} \exists_d$$

2.5. **Propriétés du calcul des prédicats classique.**

Théorème 5. *Le calcul des prédicats est indécidable (il n'existe pas d'algorithme qui étant donnée une formule F, dise si F est démontrable).*

En revanche, le calcul des prédicats sans symboles fonctionnels et avec des prédicats unaires (monadiques) est décidable.

Une théorie T formulée dans le langage $\mathcal{L}$, est dite syntaxiquement complète, si pour toute formule clause F on a $T \vdash F$ ou $T \vdash \neg F$. Une théorie T admet des témoins de Henkin si pour toute formule $F(v)$ à une variable libre v le langage contient une constante c et la théorie contient un axiome $(\ \exists v\ F(v)\ ) \Rightarrow F(c)$.

Lemme 6. *Toute théorie T sur un langage L cohérente s'étend en une théorie $T' \supset T$ possédant des témoins de Henkin et qui soit cohérente et syntaxiquement complète sur un langage $L' \supset L$.*

Démonstration. On complète tout d'abord en ajoutant au langage L, pour chaque formule $F(v)$ à une variable libre. une constante c et la formule $(\ \exists v\ F(v)\ ) \Rightarrow F(c)$ — la constante c étant nouvelle, cela ne peut créer d'incohérence. Il faut itérer ce processus ω fois, car en enrichissante le langage on augmente la classe des formules à une variable libre : on obtient alors le langage L_ω et la théorie T_ω. Ceci fait, soit une formule du langage L_ω : elle est une formule à une variable libre de L_i pour l'un des L_i et donc ses témoins de Henkin et axiomes correspondants sont dans $L_{i+1} \subset L_\omega$.

Remarque : l'union d'un ensemble de théories cohérentes T_i totalement ordonnées par inclusion est cohérente. En effet, s'il y avait une contradiction, elle apparaîtrait dans un nombre fini de T_j, et soit T_J la plus grande T_J ne serait pas cohérente.

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des théories cohérentes contenant T_ω. Il est non vide, et toute partie totalement ordonnée admet un majorant. En utilisant le lemme de Zorn, cet ensemble admet un élément maximal T'. Cette théorie est cohérente est syntaxiquement complète. Si, poue formule F on avait ni $T \vdash F$ ni $T \vdash \neg F$ alors $T \cup F$ serait cohérent et contiendrait strictement T. $\square$

Lemme 7. *Toute théorie T admettant des témoins de Henkin, cohérente et syntaxiquement complète admet un modèle.*

Démonstration. Puisqu'il y a des témoins de Henkin, il y a des constantes. Ces constantes et les symboles de fonctions engendrent librement des termes clos. Ce sont les éléments du modèle $\mathcal{M}$. Une fonction envoie un n-uplet de termes sur le terme obtenu par application de f : $[f](t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$.

Pour un symbole de relation n-aire R on a $[R](t1, \ldots, t_n) = 1$ si et seulement si $T \vdash [R](t1, \ldots, t_n)$. On peut voir par induction sur la structure des formules que ce résultat reste vrai pour toute formule F. En particulier le modèle ainsi construit satisfait T.

Par exemple si $F = G \vee H$:

- Si $\mathcal{M} \models F$ on $\mathcal{M} \models G$ ou $\mathcal{M} \models H$. SI $\mathcal{M} \models G$ alors par hypothèse d'induction $T \vdash G$ et donc $T \vdash G \vee H$.
- Si $T \vdash G \vee H$, $T \vdash G$ ou non. Dans le premier cas, $\mathcal{M} \models G$ et par suite $\mathcal{M} \models G \vee H$. Dans le second, comme T est syntaxiquement complète $T \vdash \neg G$ et comme $T \vdash G \vee H$ on a (par déduction formelle) $T \vdash H$, et donc par hypothèse d'induction $\mathcal{M} \models H$ et donc $\mathcal{M} \models G \vee H$.

Par exemple si $F = \forall v\ G(v)$:

– Si $T \not\vdash \forall v\, G(v)$, comme T est syntaxiquement complète, $T \vdash \exists v\, \neg G(v)$, ety comme T a des témoins de Henkin, $T \vdash \neg G(c)$ et comme T cohérente $T \not\vdash G(c)$. Par hypothèse d'induction, $\mathcal{M} \not\models G(c)$ hence $\mathcal{M} \not\models \forall v\, G(v)$.
– Supposons que $T \vdash \forall v\, G(v)$. Soit t un terme clos. On a $T \vdash G(t)$ et par hypothèse d'induction $\mathcal{M} \models G(t)$. Comme c'est le cas pour tout $t \in \mathcal{M}$ on a $\mathcal{M} \models \forall v\, G(v)$.

$\square$

Les deux lemmes précédents entraîne le résultat suivant dû à Gödel 1930 (mais la preuve exposée ici est de Henkin 1949) :

Théorème 8. *Toute théorie cohérente admet un modèle.*

Démonstration. Soit T une théorie cohérente. D'après les deux lemmes on peut étendre T en T' sur L', et trouver un modèle M de T', c'est en particulier un modèle de T (en ne considérant que les formules de T' sur le langage L). $\square$

Le théorème d'Herbrand, plus délicat à établir, fournit une autre démonstration de ce résultat. Elle ne nécessite pas de compléter la théorie, et ramène le calcul des prédicats au calcul propositionnel. Mettons la formule F qen forme prénexe (les quantificateurs sont tous en tête) et substituons des termes aux variables universelles et des constantes aux variables existentielles dans la formule sans quantificateur : on obtient ainsi ce que Cori et Lascar appellent les avatars de F. La formule initiale admet un modèle si on peut simultanément satisfaire les avatars de la formule en considérant les formules atomiques sur des termes comme autant de propositions indépendantes.

Théorème 9 (Complétude)**.** *Si ϕ est vraie dans tous les modèles d'une théorie T alors ϕ est une conséquence de T (il existe n formules $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T$ telles que $\tau_1, \ldots, \tau_n \vdash \phi$).*

Démonstration. Si $T \not\vdash F$ alors $T \cup \{\neg F\}$ est cohérente et on pourrait trouver un modèle de T ne satisfaisant pas F — un modèle ne satisfait jamais F et $\neg F$. $\square$

En prenant $T = \emptyset$ on obtient :

Corollaire 10. *Une formule du calcul des prédicats est vraie dans tout modèle si et seulement si elle est démontrable.*

Théorème 11 (Compacité)**.** *Un ensemble de formules admet un modèle si et seulement si toute partie finie de cet ensemble admet un modèle.*

3. Logique classique et logique intuitionniste

Proposition 12. *Le calcul des séquents est équivalent à la déduction naturelle avec tiers exclu.*

On restreint le calcul des séquents : au plus une formule à droite, ce qui modifie la règle du "ou" ($\vee$). et supprime les règles de négation mais $\neg A$ est défnit comme $A \Rightarrow \bot$ ou $\bot$ est une formule avec l'unique règle déjà rencontrée.

Proposition 13. *La déduction naturelle est équivalente au calcul des séquents restreint aux séquents ayant exactement une conclusion (ce qui rend inutiles les règles C et A à droite), et la règle pour $\bot$ (ex falso quod libet sequitur) comme en déduction naturelle.*

Théorème 14. *Si $\vdash A \vee B$ en logique intuitionniste alors $\vdash A$ ou $\vdash B$.*
Si $\vdash \exists x A(x)$ alors on peut extraire de la démonstration un terme t avec $\vdash A(t)$ — les preuves intuitonnistes sont constructives.

On définit inductivement la non-non traduction $F^{\neg\neg}$ d'une formule F

$$\begin{aligned} \bot^{\neg\neg} &= \bot \\ at^{\neg\neg} &= \neg\neg at \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \wedge B)^{\neg\neg} &= A^{\neg\neg} \wedge B^{\neg\neg} \\ (A \Rightarrow B)^{\neg\neg} &= A^{\neg\neg} \Rightarrow B^{\neg\neg} \\ (\forall x.A)^{\neg\neg} &= \forall x.A^{\neg\neg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \vee B)^{\neg\neg} &= \neg\neg(A^{\neg\neg} \vee B^{\neg\neg}) \\ (\exists x.A)^{\neg\neg} &= \neg\neg\exists x.A^{\neg\neg} \end{aligned}$$

Théorème 15 (Gödel Kolmogorov)**.** *On a* $\vdash F$ *en logique classique si et seulement si on a* $\vdash F^{\neg\neg}$ *en logique intutionniste.*

Cela signifie que la logique intuitonniste permet d'étudier la logique classique, mais pas le contraire.

Au niveau des preuves, on comprend la différence, mais qu'en est-il des modèles, pour conserver un résultat de complétude ? C'est l'un des sujets de cette école.

[1, 3, 5, 4, 6]

RÉFÉRENCES

1. Jon Barwise, *An introduction to first order logic*, in Barwise et al. [2], pp. 5–46.
2. Jon Barwise, H. J. Keisler, K. Kunen, Y. N. Moschovakis, and A. S. Troelstra (eds.), *Handbook of mathematical logic*, 5th ed., Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 90, North-Holland Publishing Co., 1989.
3. René Cori and Daniel Lascar, *Logique mathématique. Cours et exercices. I*, Axiomes. Collection de Logique Mathématique, Masson, Paris, 1993, Calcul propositionnel, algèbres de Boole, calcul des prédicats. [Propositional calculus, Boolean algebras, predicate calculus], With a preface by J.-L. Krivine. MR MR1230624 (94g :03001)
4. Jean-Yves Girard, *Le point aveugle. cours de logique. 1 : Vers la perfection*, Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts, Paris, 2006 (French).
5. Jean-Yves Girard, Paul Taylor, and Yves Lafont, *Proofs and types*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, no. 7, Cambridge University Press, 1989 (English).
6. Dirk van Dalen, *Logic and structure*, second ed., Universitext. [University Textbook], Springer-Verlag, Berlin, 1983. MR MR720049 (84k :03002)