Bibliothèque scientifique Payot

A l'époque où se développent les techniques et les modes de pensée liés à l'informatique, l'intelligence artificielle et la modélisation mathématique des processus cognitifs, il importe, pour mieux maîtriser notre modernité, de comprendre son histoire. L'anthologie de *Logique et fondements des mathématiques,* dont cette première partie rassemble des textes couvrant la période 1850-1914, se propose de contribuer à cette tâche: c'est en effet dès le milieu du XIX^e^ siècle que prirent leur essor de nouvelles recherches en logique, en mathématiques, en théorie des ensembles et bientôt en construction des langages artificiels. La pensée logico-mathématique dut ensuite surmonter la «crise des fondements» ; dans les premières années du XX^e^ siècle, les plus grands mathématiciens consacrèrent leurs efforts à frayer les voies de différentes solutions. Nombreuses sont les disciplines contemporaines qui peuvent être tenues pour le développement de ces recherches.

Cet ouvrage présente des textes de Bolzano, De Morgan, Boole, Frege, Cantor, Peirce, Dedekind, Schröder, Hilbert, Russell, Richard, König, Baire, Borel, Hadamard, Lebesgue, Zermelo, Brouwer, Poincaré. Il a été conçu et élaboré par l'Unité de recherche associée au CNRS 1079, dans le cadre des activités de l'Institut d'Histoire et Philosophie des Sciences et des Techniques (Université de Paris-I).

Chacun des articles et extraits d'ouvrages, le plus souvent traduits pour la première fois en français, est précédé d'une introduction rédigée par un spécialiste. Ont collaboré à ce volume, sous la direction de François Rivenc et de Philippe de Rouilhan : Jacques Bouveresse, Bachir Diagne, Jacques Dubucs, Claudine Engel-Tiercelin, Michel Fichant, Gerhard Heinzmann, Françoise Longy, Jean Mosconi, Daniel Parrochia, Christian Rétoré, Joël Sakarovitch, Jan Sebestik, Hourya Sinaceur et Mohamed A. Sinaceur.

Design Pentagram
Illustration : Paul Klee, *Zerstörtes Labyrinth (Labyrinthe détruit),* 1939, 346 (Y6), (Öl und Wasserfarben auf ölgrundiertem Papier auf Jute, 54 X 70 cm), Berne, Kunstmuseum, Paul-Klee Stiftung, © 1992, VG Bild-Kunst à Bonn et ADAGP à Paris.

92 - XI
350,00 FF TTC
ISBN 2-228-88483-9
908945-3
9 782228 884839

Institut d'Histoire et Philosophie des Sciences et des Techniques
Logique et fondements des mathématiques

Bibliothèque scientifique Payot

Institut d'Histoire et Philosophie des Sciences et des Techniques

Logique et fondements des mathématiques

Anthologie (1850 - 1914)

(sous la direction de François Rivenc et Philippe de Rouilhan)

BOREL

Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles (1905)

Cinq lettres de Baire, Borel, Hadamard, et Lebesgue sur la théorie des ensembles (1905a)

En 1904, Zermelo publie un article[1] où il démontre qu'il est possible de bien ordonner tout ensemble *E* moyennant l'existence d'une fonction de choix, c'est-à-dire une fonction qui à toute partie non vide de *E* associe l'un de ses éléments. L'existence d'une telle fonction pour tout ensemble *E* est précisément l'une des formulations possibles de l'axiome du choix. Son article suscitera une vive polémique sur cet axiome du choix, polémique dont participent les textes que nous présentons, à savoir :

— une note dans laquelle Borel conteste fortement le principe de choix qu'utilise Zermelo ;

— un débat épistolaire entre Hadamard, Baire, Lebesgue et Borel, sur le bien-fondé d'un tel principe.

C'est cette polémique qui incitera Zermelo à publier, en 1908, un second article[2]. Mais ni sa nouvelle preuve ni l'argumentation par laquelle il tentera de convaincre les sceptiques n'infirment les objections des présentes lettres[3]. En effet, les positions que confrontent en ce débat les quatre auteurs de ces cinq lettres sont schématiquement les suivantes :

— Hadamard ne voit aucun inconvénient à utiliser sans restriction l'axiome du choix ;

1. « Beweis daß jede Menge wohlgeordnet kann », Zermelo 1904.
2. « Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung », Zermelo 1908.
3. Le lecteur soucieux de confronter leurs objections à la preuve de Zermelo qui les a suscitées pourra donc tout aussi bien se référer au second article de Zermelo, qui figure dans le présent ouvrage. Sa présentation lui fournira, en plus de l'explication de la preuve, un aperçu historique sur l'axiome du choix que nous n'avons pas repris ici.

— Borel suggère de limiter ce principe aux ensembles dénombrables et Baire aux ensembles effectivement décrits ;

— Lebesgue estime qu'une existence établie à l'aide de l'axiome du choix *ne peut être utilisée que de façon limitée.*

Aussi voit-on mal quels arguments définitifs et concluants ils pourraient apporter au débat en l'absence d'autres conséquences troublantes de l'axiome du choix, de théorie axiomatique des ensembles et de notions d'effectivité[4].

Tous s'accordent à dire que Zermelo a bien démontré, moyennant l'existence d'une fonction de choix, que tout ensemble peut être bien ordonné. Borel ouvre cependant le débat en demandant ce qui distingue la preuve de Zermelo de l'argument informel suivant[5] : *Pour bien ordonner un ensemble, il suffit d'y choisir un élément, puis un deuxième, etc. et procéder ainsi un nombre transfini de fois jusqu'à épuisement de l'ensemble.*

De fait, chaque fois que l'on tente de formaliser ce procédé des choix dépendants dans une quelconque théorie des ensembles, une fonction de choix se révèle nécessaire. En effet, pour mettre un ensemble en bijection avec un ordinal, on commence par choisir un premier élément puis, à chaque nouvelle étape on choisit comme élément suivant un élément autre que ceux déjà pris, c'est-à-dire un élément distingué dans le complémentaire de la partie bien ordonnée que l'on vient de construire (c'est précisément ce que fait la preuve de Zermelo). Choisir uniformément cet élément distingué nécessite bien une fonction de choix.

A la lumière des mathématiques actuelles, cet argument semble donc n'être que l'explication informelle de la preuve de Zermelo. Soulignons encore qu'à cette époque, il n'existait aucune théorie axiomatique des ensembles et que, de toute façon, les auteurs de ces lettres ne semblent pas intéressés par une telle approche. Leur controverse porte plutôt sur l'apport de la démonstration de Zermelo. Hadamard considère que le principe utilisé par Zermelo est valide, et que Zermelo a pleinement démontré que tout ensemble peut être bien ordonné; Lebesgue estime que Zermelo voulait uniquement prouver qu'un ensemble muni d'une fonction de choix peut être bien ordonné, et constate qu'en fait on ne connaît de fonction de choix que pour les ensembles bien ordonnés ; enfin, Baire et Borel estiment que le principe de choix utilisé n'est pas fondé, et que l'article de Zermelo ne prouve pas ce qu'il annonce.

4. Il faudra attendre *Zermelo 1908a* pour une première axiomatique de la théorie des ensembles, *Gödel 1931* pour une définition précise des fonctions (primitives) récursives, *Heyting 1934* pour une formalisation de la vision intuitionniste des mathématiques constructives.

5. L'expression « choix dépendants » utilisée dans les lettres renvoie à cet argument, lequel n'a rien à voir avec ce que l'on a appelé par ailleurs « axiome du choix dépendant ».

Plus curieuse est cette objection de Lebesgue[6] : *Comment au cours de la preuve, sommes-nous assurés de toujours faire référence à la même fonction de choix*[7] ?

Cette remarque peut étonner, attendu que la règle en mathématiques est de toujours penser au même objet chaque fois qu'il intervient dans la démonstration. Mais il faut voir que la fonction incriminée provient d'un axiome et qu'il est impossible, en général, de distinguer entre elles deux telles fonctions, puisque pour un ensemble quelconque, la seule chose que l'on puisse en dire, en général, est qu'elles sont des fonctions de choix. On notera à ce propos que, dans les formalisations ultérieures de la théorie des ensembles, l'axiome du choix (comme d'ailleurs l'axiome de l'infini) se distingue des axiomes de base[8] de la théorie des ensembles dont la combinaison avec l'axiome d'extensionnalité assure l'unicité de l'objet dont ils affirment l'existence.

Leur peu d'intérêt pour une éventuelle preuve de non-contradiction[9] nous amène naturellement à situer les auteurs de ces lettres dans le paysage mathématique. Ce sont tous des analystes, comme en témoignent les exemples qui émaillent ces lettres, et leur intérêt pour ce problème de fondement des mathématiques n'est pas le fruit d'une démarche systématique, mais celui de leurs travaux sur les fonctions d'une variable réelle et les ensembles de nombres réels[10]. C'est vraisemblablement ce regard d'analyste qui amène Baire et Hadamard, pourtant d'avis opposés, à laisser pour peu convaincant un éventuel argument logique de non-contradiction de l'axiome du choix. Pour cette même raison, on ne s'étonnera pas de l'absence de références logiques lorsqu'ils évoquent la notion de définissabilité.

6. Dans sa dernière lettre, Borel reprend cette objection de Lebesgue de la séance du 4 mai de la société, mais ladite objection figure également dans la lettre de Lebesgue.

7. Cela est bien évidemment nécessaire à la preuve de Zermelo.

8. L'axiome de la réunion, l'axiome de l'ensemble des parties, le schéma d'axiomes de compréhension et le schéma d'axiomes de substitution.

9. Non-contradiction ou cohérence de l'axiome du choix avec le reste des mathématiques existantes. Une fois les notions de langage, de théorie et de modèle précisées et la théorie des ensembles formalisée, si l'on admet que la théorie des ensembles englobe toutes les mathématiques, cette propriété de cohérence devient une question purement mathématique. Gödel y répondra positivement en démontrant dans *Gödel 1938* sa cohérence relative : une éventuelle contradiction de la théorie des ensembles avec l'axiome du choix entraînerait une contradiction de la théorie des ensembles sans l'axiome du choix, via le théorème de complétude *(Gödel 1930)*. On sait par ailleurs *(Gödel 1931)* qu'on ne peut obtenir de preuve absolue de cohérence.

10. Remarquons que ce sont de semblables considérations qui conduisirent Cantor à la notion d'ensemble et aux résultats que l'on sait.

Une connaissance, même sommaire, de leurs travaux permet de comprendre le différend qui oppose Hadamard à Baire, Borel et Lebesgue. En effet, bien qu'ils soient tous les quatre analystes, les trois derniers travaillent à l'élaboration de la théorie de la mesure et découvrent ainsi des ensembles de nombres réels dont la complexité a de quoi surprendre[11].

Et, s'il est vrai, comme le mentionne la présentation de *Zermelo 1908* que « la majorité des mathématiciens a admis l'utilisation de l'axiome du choix », cela n'est certainement pas le cas des analystes travaillant en théorie de la mesure. En effet, l'application de l'axiome du choix dans cette discipline fait apparaître des ensembles que l'on appelle non mesurables, et ces ensembles sont sources de théorèmes qui contredisent radicalement notre intuition géométrique[12].

Le premier de ces résultats, *Vitali 1905*, est contemporain de ces lettres et fait état d'un ensemble non mesurable obtenu au moyen de l'axiome du choix non dénombrable[13]. Par un argument plus complexe mais de même nature, Hausdorff établira qu'à un ensemble dénombrable de points près il est possible de superposer (par une transformation isométrique) une moitié de sphère et un tiers de sphère (*Hausdorff 1914*). Mais le plus célèbre et le plus parlant des paradoxes issus de l'axiome du choix est assurément celui de *Banach-Tarski 1924*, qui découle du précédent et affirme que l'on peut partager une boule fermée en un nombre fini de morceaux et agencer (par des transformations isométriques) ces morceaux pour obtenir deux boules fermées disjointes de même rayon[14].

On peut s'étonner que ni Baire ni Borel ni Lebesgue n'envisage la possibilité de tels paradoxes qui viendraient justifier leur méfiance à l'égard de l'axiome du choix. Cependant, lorsque Borel fait d'emblée la différence entre l'axiome du choix dénombrable et l'axiome du choix général, et surtout lorsque Lebesgue précise qu'il s'agit pour lui non d'une différence théorique mais d'une différence pratique, on est tenté d'y voir la prémonition d'ensembles inutiles et monstrueux engendrés par l'application de l'axiome du choix général à l'analyse. En effet, conformément à l'intuition de Lebesgue, il n'est aucune différence théorique entre ces deux axiomes — quant à leur cohérence, leur indépendance — mais leurs conséquences analytiques sont foncièrement différentes. L'axiome du choix dénombrable est indispensable à l'analyse de l'époque et lui suffit amplement (il était en fait utilisé de manière implicite pour bon nombre de résultats); il s'accorde extrêmement bien avec l'intuition (d'où son utilisation implicite) et n'est source d'aucun paradoxe. En revanche, l'application de l'axiome du choix général à l'analyse conduit aux paradoxes précités sans pour autant apporter force résultats[15]. C'est pour cela qu'il est commun, dans ce domaine des mathématiques, de se limiter à l'axiome du choix dénombrable ou bien même d'adopter un axiome qui contredit l'axiome du choix, l'axiome de Solovay, qui affirme que tout ensemble de nombres réels est mesurable[16].

L'étude des ensembles de nombres réels les a bien sûr conduits à s'interroger sur les notions de nombre, suite et ensemble définissables. C'est effectivement à l'aide de cette notion de définissabilité que *Gödel 1938* montrera la cohérence de l'axiome du choix[17]. Concernant cette délicate question, Hadamard se réfère par deux fois à un article assez informel *(Tannery 1897)*, où l'auteur distingue parmi les définitions celles qui permettent une description effective de l'objet[18] défini; l'objet ainsi défini est dit décrit[19].

Par exemple, le développement décimal de $\sqrt{2}$ est une suite de nombres compris entre 0 et 9 qui peut être décrite au moyen d'un nombre fini de mots : l'algorithme d'extraction de la racine carrée par la méthode des grandes divisions, tandis que l'unique couple de nombres (a, b) parmi $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ tel que a et b

11. Tels les ensembles mesurables non boréliens auxquels Lebesgue fait allusion (« ensembles mesurables non mesurables B »).

12. En effet, il s'agit de résultats aussi rigoureusement établis que n'importe quels autres théorèmes, mais qui semblent mieux rendre compte de la multiplication des pains et des poissons que des propriétés géométriques de l'espace...

13. Cet ensemble est défini ainsi : on considère, sur l'intervalle [0,1], la relation d'équivalence « x-y est rationnel » et, en appliquant l'axiome du choix à l'ensemble non dénombrable des classes d'équivalences, on choisit dans chaque classe un représentant. On démontre alors aisément que l'ensemble A de ces représentants n'est pas mesurable.

14. On trouvera un exposé élémentaire de la preuve dans *Guinot 1990*. Pour une étude exhaustive du lien entre ce théorème et l'axiome du choix on se reportera à l'ouvrage (nettement plus ardu) *Wagon 1984* — où ne figure cependant pas le résultat postérieur *Wehrung 1990*.

15. Ceci est dû au fait que les espaces fonctionnels intéressants sont généralement métrisables et séparables ; auquel cas, on peut raisonner avec des suites de fonctions.

16. Notons qu'on ne connaît pas d'autre moyen de restreindre l'axiome du choix pour éviter ces paradoxes, puisque F. Wehrung a récemment démontré que le théorème de Hahn-Banach, bien plus faible que l'axiome du choix et d'une utilisation très commune en analyse fonctionnelle, suffit à engendrer de tels paradoxes *(Wehrung 1990)*.

17. Et qu'on élucidera les paradoxes de Berry et Richard.

18. C'est-à-dire un nombre, une fonction, un ensemble...

19. On remarquera que Lebesgue n'utilise pas cette terminologie et donne parfois aux mots « défini » et « nommé » le sens de « décrit » ; cependant le contexte évite tout risque de confusion.

soient irrationnels et que a^b soit rationnel est un couple bien défini qui ne peut pas être décrit[20].

Soulignons que ces textes laissent une grande liberté dans l'interprétation de cette notion. On peut, en se laissant guider par le contexte et les développements ultérieurs de la logique, traduire ce terme « descriptible » par « définissable par une formule d'un langage logique[21] », « effectivement descriptible[22] » ou bien même, comme ils le suggèrent parfois, par « défini par une suite finie de mots[23] » ; cette dernière acception mériterait d'être précisée, car son utilisation naïve est la source des paradoxes de Berry et Richard.

Suivant la nature de leur définition, les objets mathématiques se voient attribués par Borel et Lebesgue différents degrés d'existence tandis qu'Hadamard accorde à tous, indépendamment de leur définition, une égale et pleine existence ; Baire, pour sa part, se refuse à considérer les objets qui ne peuvent être effectivement décrits.

De cette méfiance à l'égard de l'axiome du choix, des preuves d'existence non constructives et des définitions non effectives est née l'expression « intuitionnistes français », dont on qualifie parfois Baire, Borel et Lebesgue. Nombre de leurs propos mettent en évidence ce lien avec l'intuitionnisme de Brouwer et de ses successeurs. Ainsi, lorsque Lebesgue note qu'une existence prouvée de façon non constructive ne devrait s'utiliser que négativement, on ne peut s'empêcher de penser à la distinction que la logique intuitionniste fait entre $\exists x\, P(x)$ et $\neg \forall x \neg\, P(x)$, et on remarque alors que l'existence faible définie par $\neg \forall x \neg\, P(x)$ s'utilise comme il le suggère. Plus loin dans sa lettre, lorsqu'il affirme que les ensembles définis effectivement devraient satisfaire l'axiome du choix, on pense naturellement aux ensembles[24] intuitionnistes, qui vérifient évidemment ce principe[25].

20. Cet exemple est repris de *Van Dalen Troelstra 1988*. On procède ainsi : soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, auquel cas le premier couple convient et pas le second, soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, auquel cas le second couple convient et pas le premier ; mais cette preuve, la seule dont on disposait à l'époque, ne permet pas de dire lequel des deux convient. On sait depuis que c'est le second, mais il existe toujours de tels exemples — trop longs pour être présentés ici.

21. L'exemple d'une formule de la théorie des ensembles est particulièrement intéressant puisque c'est par ce biais qu'on définit les ensembles constructibles qui satisfont naturellement l'axiome du choix *(Gödel 1938)*.

22. Dans un sens variable suivant le contexte : récursif, récursivement énumérable, défini par une preuve constructive...

23. Cette interprétation de « décrit » fait de notre deuxième exemple, et de bien d'autres, des objets décrits.

24. En fait, il s'agit plutôt de types que d'ensembles, peu naturels en intuitionnisme.

25. Tout comme les ensembles constructibles de *Gödel 1938*.

Un autre exemple de préoccupation commune à Baire, Borel et Lebesgue et aux intuitionnistes[26], est la possibilité d'extraire la part constructive, c'est-à-dire l'algorithme sous-jacent, de théorèmes d'existence utilisant des arguments non constructifs, ce qu'évoque Borel dans la dernière lettre. Et s'il rejette aussitôt cette possibilité, à cause de la disproportion entre le travail qu'elle demande et l'utilité des résultats escomptés, on reliera cette suggestion à l'essor que connaissent ces recherches depuis que l'informatique a rendu leur utilité flagrante.

Même les propos d'Hadamard rangent sans ambiguïté Baire, Borel et Lebesgue parmi les intuitionnistes. En effet, leur méfiance les amènent à se restreindre aux objets descriptibles[27] et appelle en retour deux critiques d'Hadamard, critiques que les mathématiciens classiques adressent habituellement aux mathématiciens intuitionnistes. La première est que cette « descriptibilité » est trop subjective pour être mathématique[28], et la deuxième est que de fait ils se limitent à étudier un univers dénombrable.

Si Baire et Lebesgue s'étaient rassemblés autour de la position médiane de Borel, on pourrait schématiser grossièrement leur parenté avec l'intuitionnisme orthodoxe ainsi : ils se refusent à appliquer au continu ($\mathbb{R}$ ou les suites d'entiers) des raisonnements qu'ils considèrent comme évidemment valides pour le dénombrable (les nombres entiers), tout comme l'intuitionnisme se refuse à appliquer des raisonnements trivialement vérifiés par les structures finies à des structures infinies. Mais malgré leur évidente proximité, aucun d'eux ne semble intéressé à dégager une pensée commune, et chacun insiste sur sa différence de point de vue. Baire, plus proche de l'intuitionnisme que Borel, souhaite restreindre les principes de raisonnement dès qu'il s'agit d'ensembles infinis — même s'ils ne sont que dénombrables —, tandis que Lebesgue, moins radical que Borel, ne veut faire qu'une différence *pratique* entre le dénombrable et le continu.

Outre cette différence de point de vue qui distingue Baire, Borel et Lebesgue de l'intuitionnisme de Brouwer, signalons aussi leur grande différence d'attitude face à ces questions de fondements des mathématiques. Même si leur pratique de

26. Il s'agit là d'une préoccupation constructive générale qu'ils partagent donc avec les autres formes de mathématiques constructives (l'école russe de Kolmogoroff et de Markov, l'analyse constructive de Bishop...). Notons toutefois que l'intuitionnisme est la seule approche logico-fondationnelle des mathématiques constructives.

27. Dans un sens assez flou et variable suivant les individus, comme on l'a déjà mentionné.

28. Ce qui présuppose, chez l'auteur d'une telle critique, une vision un tant soit peu platonicienne des mathématiques.

l'analyse les convainc de restreindre les mathématiques usuelles, cette conviction les amènera tout au plus à de judicieuses suggestions, mais jamais à la construction d'une mathématique qui échapperait systématiquement à leurs propres critiques[29]. C'est pourquoi leurs réflexions sur ce sujet a pu faire l'effet d'un *gentleman pastime* à certains intuitionnistes *(Troelstra Van Dalen, 1988).*

C. RÉTORÉ

Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles

Sur la demande qu'a bien voulu m'adresser la rédaction de ce journal, je vais résumer brièvement quelques réflexions qui m'ont été suggérées par l'intéressante note de M. Zermelo[1].

L'un des problèmes les plus importants qu'on puisse se poser relativement à un ensemble quelconque *M* est le suivant :

A. *Mettre M sous la forme d'un ensemble bien ordonné.*

Le résultat remarquable obtenu par M. Zermelo peut s'énoncer ainsi : pour savoir résoudre le problème A, il suffit de savoir résoudre le problème B qui suit :

B. *Étant donné un sous-ensemble quelconque M′ de M, choisir dans M′ d'une manière déterminée (mais d'ailleurs arbitraire) un élément m′, auquel on donnera le nom d'élément distingué de M; ce choix devra être fait pour tous les sous-ensembles M′ de M.*

Il est évident que toute solution du problème A fournit une solution particulière du problème B; mais la réciproque n'était pas évidente et c'est à M. Zermelo que nous devons de savoir que : *les problèmes A et B sont équivalents.*

Mais ce résultat, quel que soit son intérêt, ne saurait être considéré comme fournissant une solution générale du problème A. En effet, pour que le problème B puisse être regardé comme résolu relativement à un ensemble donné *M*, il faudrait donner un moyen au moins théorique de déterminer l'élément distingué *m′* d'un sous-ensemble quelconque *M′* et ce problème

29. Notons qu'à ce jour personne d'autre n'a tenté de fonder une mathématique sur leurs positions, ce qui eût pourtant été passionnant.

1. *Math. Annalen 59* (1904), pp. 514-516.

paraît des plus ardus, si l'on suppose, pour fixer les idées, que *M* coïncide avec le continu.

On ne peut, en effet, regarder comme valable le raisonnement suivant, auquel fait allusion M. Zermelo : « Il est possible, dans un ensemble particulier *M′*, de choisir *ad libitum* l'élément distingué *m′*; ce choix pouvant être fait pour chacun des ensembles *M′*, peut être fait pour l'ensemble de ces ensembles. »

Un tel raisonnement ne me paraît pas mieux fondé que le suivant : « Pour bien ordonner un ensemble *M*, il suffit d'y choisir arbitrairement un élément auquel on attribuera le rang 1, puis un autre auquel on attribuera le rang 2, et ainsi de suite *transfiniment*, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les éléments de *M* par la suite des nombres transfinis. » Or, aucun mathématicien ne regardera comme valable ce dernier raisonnement. Il me semble que les objections que l'on peut y opposer valent contre tout raisonnement où l'on suppose un *choix arbitraire* fait une infinité non dénombrable de fois; de tels raisonnements sont en dehors du domaine des mathématiques[2].

Paris, le 1er décembre 1904.

E. BOREL

Cinq lettres sur la théorie des ensembles

I. *Lettre de M. Hadamard à M. Borel*

J'ai lu avec intérêt les arguments que tu opposes (2e Cahier du tome LX des *Mathematische Annalen*) à la démonstration de M. Zermelo parue dans le tome précédent. Je ne partage cependant pas ton opinion à ce sujet. Je n'admets pas, tout d'abord, l'assimilation que tu établis entre le fait qui sert de point de départ à M. Zermelo et le raisonnement qui consisterait à numéroter les éléments de l'ensemble les uns après les autres,

2. On me permettra de citer quelques lignes d'une lettre de M. Baire (de Montpellier), qui me paraissent résumer avec beaucoup de netteté une opinion que je crois très juste et qui est sans doute très répandue : « Personnellement, je doute qu'une commune mesure puisse jamais se trouver entre le continu, ou ce qui, dans l'espèce, revient au même, l'ensemble de toutes les suites d'entiers positifs, et les ensembles bien ordonnés; il y a là, pour moi, deux choses, dont chacune n'est définie que virtuellement, et il y a des chances pour que ces deux virtualités soient irréductibles. »

ce numérotage étant poursuivi *transfiniment*. Il y a, en effet, une différence fondamentale entre les deux cas: le raisonnement qui vient d'être cité en dernier lieu comporte une série de choix successifs *dont chacun dépend des précédents*; c'est pour cela que son application transfinie est inadmissible. Je ne vois aucune analogie à établir, au point de vue qui nous occupe, entre les choix en question et ceux dont parle M. Zermelo, lesquels sont *indépendant les uns des autres*.

C'est d'ailleurs dans le cas d'une infinité *non dénombrable* de choix que tu récuses cette manière d'opérer; mais, à mon tour, je ne vois pas de différence, à cet égard, entre le cas d'une infinité non dénombrable et celui d'une infinité dénombrable. La différence serait manifeste s'il y avait une dépendance quelconque entre les choix en question, parce qu'il faudrait alors avoir égard à l'ordre dans lequel on les opérerait: elle me paraît, encore une fois, s'évanouir complètement dans le cas des choix indépendants.

Ce qui est certain, c'est que M. Zermelo ne donne aucun moyen d'exécuter *effectivement* l'opération dont il parle, et qu'il reste douteux que personne puisse, dans la suite, indiquer ce moyen. Il aurait été assurément plus intéressant de résoudre le problème sous cette forme; mais la question ainsi posée (détermination effective de la correspondance cherchée) n'en est pas moins complètement distincte de celle que nous examinons (une telle correspondance existe-t-elle ?): il y a entre elles toute la différence, laquelle est fondamentale, qui existe entre ce que M. Tannery[3] appelle *une correspondance* qui peut être *définie* et une correspondance qui peut être *décrite*. Plusieurs questions importantes de mathématiques changeraient totalement de sens, et de solutions, si l'on substituait le second mot au premier. Tu emploies des correspondances dont tu constates l'*existence* sans pouvoir cependant les *décrire*, dans ton important raisonnement relatif aux séries qui admettent leur cercle de convergence comme coupure: si l'on se bornait aux séries entières dont la loi de formation peut être décrite, l'opinion ancienne (à savoir, que les séries entières admettant leur cercle de convergence comme coupure sont l'exception) devrait, à mon sens, être considérée comme la vraie. C'est d'ailleurs une pure question de sentiment; car la notion de correspondance « qui peut être décrite » est, pour reprendre ton

3. *Revue générale des sciences*, 1897, t. VIII, p. 133 et sqq.

expression, « en dehors des mathématiques »; elle relève du domaine de la psychologie et est relative à une propriété de notre esprit, c'est une question de cette nature que celle de savoir si la correspondance employée par M. Zermelo pourra jamais être indiquée *en fait*.

Quant à l'existence de cette correspondance, elle me paraît aussi adéquate à la possibilité de prendre *un* élément dans un ensemble quelconque donné, que la proposition suivante:

A. *Un nombre* x *étant donné, il existe des nombres* y *qui ne sont liés à* x *par aucune équation algébrique à coefficients entiers,*

l'est à celle-ci:

B. *Il existe des fonctions de* x *telles que, pour aucune valeur de* x, y *n'ait ni une valeur algébrique, ni une valeur liée à* x *par une équation algébrique à coefficients entiers.*

On pourrait d'ailleurs, sans doute, former de telles fonctions. Mais ce que je prétends, c'est que cela n'est nullement nécessaire pour affirmer l'exactitude du théorème B; et je crois que beaucoup de mathématiciens ne prendraient pas plus que moi cette peine s'ils avaient à employer le théorème en question.

J. HADAMARD.

II. *Lettre de M. Baire à M. Hadamard*

Borel me communique la lettre où vous lui exposez votre manière de voir sur le grand débat soulevé par la Note Zermelo. Je vous demande la permission de vous adresser quelques réflexions qu'elle me suggère.

Je suis, vous le savez, de l'avis de Borel, en gros, et si je m'en écarte, ce sera pour aller plus loin que lui.

Supposons qu'on fasse un effort pour essayer d'appliquer la méthode de Zermelo à l'ensemble M des suites d'entiers positifs. On prend dans M un élément distingué m_1; reste l'ensemble M—m_1, dans lequel on prend un élément distingué m_2; etc. Ces choix successifs dépendent bien chacun de ceux qui le précèdent. Mais, dites-vous avec M. Zermelo, les choix sont indépendants les uns des autres, parce qu'il admet comme point de départ *un choix d'élément distingué fait dans* TOUTE *partie de M*.

Ceci ne me paraît pas satisfaisant : c'est, pour moi, dissimuler la difficulté *en la noyant dans une difficulté plus grande.*

L'expression *ensemble donné* est employé à chaque instant : a-t-elle un sens ? Pas toujours, selon moi. Dès qu'on parle d'infini (même dénombrable, et c'est ici que je suis tenté d'être plus radical que Borel), l'assimilation, *consciente ou inconsciente,* avec un sac de billes qu'on donne de la main à la main, doit complètement disparaître, et nous sommes, à mon avis, dans le *virtuel*, c'est-à-dire que nous faisons des conventions qui nous permettent ultérieurement, un objet étant défini *par une nouvelle convention,* d'affirmer certaines propriétés de cet objet. Mais croire qu'on est allé plus loin ne me paraît pas légitime. En particulier, de ce qu'un ensemble est donné (nous serons d'accord pour dire, par exemple, que nous nous donnons l'ensemble des suites d'entiers positifs), *il est faux pour moi de considérer les parties de cet ensemble comme données.* A plus forte raison je refuse d'attacher un sens au fait de concevoir un choix dans chaque partie d'un ensemble.

M. Zermelo dit : « Concevons qu'à tout ensemble partiel de *M* corresponde un de ses éléments. » C'est là une conception qui n'a rien de contradictoire, d'accord. Aussi, tout ce qu'il démontre pour moi, c'est que nous n'apercevons pas de contradiction à concevoir que, dans tout ensemble qu'on nous définira, les éléments aient entre eux des relations de position identiques à celles qu'ont les éléments des ensembles bien ordonnés. Pour dire après cela qu'on a établi que tout ensemble peut être mis sous la forme d'un ensemble bien ordonné, il faut donner aux mots une extension extraordinaire et, j'ajouterai, trompeuse.

Dans ce qui précède, je ne suis arrivé que bien incomplètement à rendre ma pensée. J'ai dit ma manière de voir dans la phrase qu'a bien voulu transcrire Borel dans sa note. Pour moi, le progrès, dans cet ordre d'idées, consisterait à délimiter le domaine de ce qui est définissable. Et, en fin de compte, en dépit des apparences, tout doit se ramener au fini.

R. BAIRE

III. *Lettre de M. Lebesgue à M. Borel*

Vous me demandez mon opinion sur la note de M. Zermelo (*Math. Annalen,* t. LIX) sur les objections que vous lui avez

faites (*Math. Annalen,* t. LX) et sur la lettre de M. Hadamard que vous me communiquez ; la voici. Excusez-moi d'être long, j'ai essayé d'être clair.

Tout d'abord je suis d'accord avec vous pour ceci : M. Zermelo a très ingénieusement démontré que l'on savait résoudre le problème A :

A. *Mettre un ensemble* M *sous forme bien ordonnée,*

toutes les fois qu'on savait résoudre le problème B :

B. *Faire correspondre à chaque ensemble* M′ *formé avec des éléments de* M *un élément particulier* m′ *de* M′.

Malheureusement le problème B n'est facile à résoudre, à ce qu'il semble, que pour les ensembles qu'on sait bien ordonner ; par suite on n'a pas une solution générale du problème A.

Je doute fort qu'on puisse donner une solution générale de ce problème, du moins si l'on admet, avec M. Cantor, que définir un ensemble M c'est nommer une propriété P appartenant à certains éléments d'un ensemble N précédemment défini et caractérisant, par définition, les éléments de M. En effet, avec cette définition, on ne sait rien sur les éléments de M d'autre que ceci : ils possèdent tous les propriétés *inconnues* des éléments de N et ce sont les seuls qui ont la propriété P inconnue. Rien là-dedans ne permet de distinguer deux éléments de M, encore moins de les classer comme il faudrait le faire pour résoudre A.

Cette objection, faite *a priori* à tout essai de solution de A, tombe évidemment si l'on particularise N ou P ; l'objection tombe, par exemple, si N est l'ensemble des nombres. Tout ce que l'on peut espérer faire de général, c'est indiquer des problèmes, tels que B, dont la résolution entraînerait celle de A et possibles dans certains cas, particuliers, mais qui se rencontrent fréquemment. D'où l'intérêt, à mon avis, du raisonnement de M. Zermelo.

Je crois que M. Hadamard est plus fidèle que vous à la pensée de M. Zermelo en interprétant la note de cet auteur comme un essai, non pas de résolution effective de A, mais de démonstration d'existence de la solution. La question revient à celle-ci, peu nouvelle : *peut-on démontrer l'existence d'un être mathématique sans le définir ?*

C'est évidemment une affaire de convention ; mais je crois qu'on ne peut bâtir solidement qu'*en admettant qu'on ne démontre l'existence d'un être qu'en le définissant.* A ce point de vue, voisin de celui de Kronecker et de M. Drach, il n'y a pas à distinguer entre A et le problème C :

C. *Tout ensemble peut-il être bien ordonné ?*

Je n'aurais rien de plus à dire si la convention que j'ai indiquée était universellement admise; mais je dois avouer que l'on emploie souvent, et que j'ai moi-même souvent employé, le mot *existence* dans d'autres sens. Par exemple, lorsqu'on interprète un raisonnement bien connu de M. Cantor en disant : *il existe une infinité non dénombrable de nombres,* on ne donne cependant pas le moyen de nommer une telle infinité. On montre seulement, vous l'avez dit avant moi, que, chaque fois qu'on aura une infinité dénombrable de nombres, on pourra définir un nombre ne faisant pas partie de cette infinité. (Le mot *définir* a tout le temps le sens de : *nommer une propriété caractéristique du défini.*) Une existence de cette nature peut être utilisée dans un raisonnement et de la manière suivante : une propriété est vraie, si, la nier, conduit à admettre qu'on peut ranger tous les nombres en suite dénombrable. Je crois qu'elle ne peut intervenir que de cette manière.

M. Zermelo utilise l'*existence* d'une *correspondance* entre les sous-ensembles de M et certains de leurs éléments. Vous voyez que, quand même l'existence de ces correspondances serait hors de doute, suivant la manière dont cette existence aurait été prouvée, il ne serait pas évident qu'on ait le droit d'utiliser cette existence comme le fait M. Zermelo.

J'arrive au raisonnement que vous énoncez ainsi : « Il est possible, dans un ensemble particulier M′, de choisir *ad libitum* l'élément distingué *m′*; ce choix pouvant être fait pour chacun des ensembles M′, peut être fait pour l'ensemble de ces ensembles », et duquel semble résulter l'existence des correspondances.

Tout d'abord, M′ étant donné, est-il évident qu'on puisse choisir *m′* ? Cela serait évident si M′ existait, au sens presque kroneckérien que j'ai dit, puisque dire que M′ existe serait alors affirmer que l'on sait nommer certains de ses éléments. Mais étendons le sens du mot *exister.* L'ensemble Γ des correspondances entre les sous-ensembles M′ et les éléments distingués *m′ existe* certainement pour MM. Hadamard et Zermelo ; ce dernier représente même le nombre de ses éléments par un produit transfini. Cependant, sait-on choisir un élément de Γ ? Non, évidemment, puisque ce serait donner de B, pour M, une solution déterminée.

Il est vrai que j'emploie le mot *choisir* dans le sens de *nommer* et qu'il suffit peut-être pour le raisonnement de M. Zermelo que *choisir* signifie *penser à.* Mais il faut cependant remarquer qu'on n'indique pas celui auquel on pense et qu'il est néanmoins nécessaire au raisonnement de M. Zermelo qu'on pense à *une correspondance déterminée toujours la même.* M. Hadamard croit, il me semble, qu'il n'est pas nécessaire qu'on démontre qu'on peut *déterminer* un élément (et un seul) ; c'est de là, à mon avis, que viennent les différences d'appréciation.

Pour mieux vous faire sentir la difficulté que je vois, je vous rappelle que, dans ma thèse, j'ai démontré l'existence (sens non kroneckérien et peut-être difficile à préciser) d'ensembles mesurables non mesurables *B,* mais il restait douteux pour moi qu'on pût jamais en nommer un. Dans ces conditions, aurais-je eu le droit de fonder un raisonnement sur cette hypothèse : *je suppose choisi un ensemble mesurable non mesurable B,* alors que je doutais que personne pût jamais en nommer un ?

Ainsi je vois déjà une difficulté dans ceci « dans un M′ déterminé je puis choisir un *m′* déterminé », puisqu'il existe des ensembles (l'ensemble C par exemple, qu'on pourrait considérer comme un ensemble M′ provenant d'un ensemble plus général) dans lesquels il est peut-être impossible de choisir un élément. Il y a ensuite la difficulté que vous signalez relative à l'infinité des choix, ce qui fait que si l'on veut considérer le raisonnement de M. Zermelo comme tout à fait général, il faut admettre qu'on parle d'une infinité de choix, infinité de puissance peut-être très grande ; on ne donne d'ailleurs ni la loi de cette infinité, ni la loi d'un des choix; on ne sait pas s'il est possible de nommer une loi définissant un ensemble de choix ayant la puissance de l'ensemble des M′; on ne sait pas s'il est possible, étant donné un M′, de nommer un *m′*.

En résumé, quand j'examine de près le raisonnement de M. Zermelo, comme d'ailleurs plusieurs raisonnements généraux sur les ensembles, je le trouve trop peu kroneckérien pour lui attribuer un sens (en tant que théorème d'existence de la solution de C, seulement, bien entendu).

Vous faites allusion à ce raisonnement : « Pour bien ordonner un ensemble il suffit d'y choisir un élément, puis un autre, etc. » Il est certain que ce raisonnement présente des difficultés énormes, plus grandes encore, au moins en apparence, que celui de M. Zermelo; et je suis tenté de croire avec M. Hadamard qu'il y a progrès à avoir remplacé une infinité de choix successifs et dépendant les uns des autres par une infinité, non ordonnée, de choix indépendants. Il n'y a peut-être là qu'une illusion et la simplification apparente tient peut-être seulement à ce que l'on doit remplacer une infinité ordonnée de choix par une infinité non ordonnée, mais de puissance plus grande. De sorte que le fait qu'on peut ramener à la seule difficulté, placée au début du raisonnement de M. Zermelo, toutes les difficultés du raisonnement simpliste que vous citez prouve peut-être simplement que cette seule difficulté est très grande. En tout cas, elle ne me paraît pas disparaître parce qu'il s'agit d'un ensemble non ordonné de choix indépendants. Par exemple, si je crois à l'existence de fonctions $y(x)$ telles que, quel que soit x, y ne soit jamais lié à x par une équation algébrique à coefficients entiers, c'est parce que je crois, avec M. Hadamard, qu'il est possible d'en construire; mais ce n'est pas, pour moi, la conséquence immédiate de l'existence, quel que soit x, de nombres y qui ne soient liés à x par aucune équation à coefficients entiers[4].

Je suis pleinement d'accord avec M. Hadamard quand il déclare que la difficulté qu'il y a à parler d'une infinité de choix sans en donner la loi est aussi grave, qu'il s'agisse ou non d'une infinité dénombrable. Quand on dit, comme dans le raisonnement que vous critiquiez, « ce choix pouvant être fait pour chacun des ensembles M′, peut être fait pour l'ensemble de ces ensembles », on ne dit rien si l'on n'explique pas les termes employés. Faire un choix, ce peut être écrire ou nommer l'élément choisi; faire une infinité de choix, ce ne peut être écrire ou nommer les éléments choisis, un à un : la vie est trop courte. Il faut donc dire ce que c'est faire. On entend par là, en général, que c'est donner la loi qui définit les éléments choisis, mais cette loi est pour moi, comme pour M. Hadamard, aussi indispensable, qu'il s'agisse d'une infinité dénombrable ou non.

Peut-être cependant suis-je encore d'accord avec vous sur ce point parce que, si je n'établis pas de différences théoriques entre les deux infinités, au point de vue pratique, je fais une grande différence entre elles. Quand j'entends parler d'une loi définissant une infinité transfinie de choix, je suis très méfiant, parce que je n'ai jamais encore vu de pareilles lois, tandis que je connais des lois définissant une infinité dénombrable de

4. En corrigeant les épreuves, j'ajoute qu'en fait le raisonnement, par lequel on légitime ordinairement l'énoncé A de M. Hadamard (p. 299), légitime en même temps l'énoncé B. Et, à mon avis, c'est parce qu'il légitime B qu'il légitime A.

choix. Mais ce n'est qu'une affaire de routine et, à la réflexion, je vois parfois des difficultés aussi graves, à mon avis, dans des raisonnements où n'interviennent qu'une infinité dénombrable de choix que dans des raisonnements où il y en a une transfinité. Par exemple, si je ne considère pas comme établi par le raisonnement classique que tout ensemble de puissance supérieure au dénombrable contient un ensemble dont la puissance est celle de l'ensemble des nombres transfinis de la classe II de M. Cantor, je n'attribue pas plus de valeur à la méthode par laquelle on démontre qu'un ensemble non fini contient un ensemble dénombrable. Bien que je doute fort qu'on nomme jamais un ensemble qui ne soit ni fini, ni infini, l'impossibilité d'un tel ensemble ne me paraît pas démontrée. Mais je vous ai déjà parlé de ces questions.

H. LEBESGUE.

IV. *Lettre de M. Hadamard à M. Borel*

La question me paraît tout à fait claire maintenant, après la lettre de M. Lebesgue. De plus en plus nettement, elle tient tout entière dans la distinction, exposée dans l'article de M. Tannery, entre ce qui est *déterminé* et ce qui peut être *décrit*.

Lebesgue, Baire et toi, adoptez à cet égard la manière de voir de Kronecker, que je croyais jusqu'ici lui être particulière. Vous répondez négativement à la question posée (ci-dessus, p. 263) par M. Lebesgue : Peut-on démontrer l'existence d'un être mathématique sans le définir? J'y réponds affirmativement. Je prends pour mienne, autrement dit, la réponse que Lebesgue fait lui-même (p. 266) à son objection relative à l'ensemble Γ.

Qu'il *nous* soit impossible, au moins actuellement, de *nommer* un élément de cet ensemble, j'en conviens. C'est là la question pour vous ; ce ne l'est pas pour moi.

Il n'y a qu'un point sur lequel il me semble que Lebesgue ne soit pas logique avec lui-même. C'est lorsqu'il se reconnaît ou ne se reconnaît pas le droit d'utiliser une existence, suivant la manière dont elle a été démontrée. Pour moi, les *existences* dont il parle sont des faits comme les autres. Sinon, elles n'ont pas lieu.

La question se pose de même vis-à-vis de Baire. Je n'aimerais pas beaucoup la placer, comme il le fait (p. 264), à la façon de

M. Hilbert, sur le terrain du *non contradictoire*, qui me paraît encore relever de la psychologie et faire entrer en ligne de compte les propriétés de nos cerveaux. Je ne comprends même pas bien comment M. Zermelo peut avoir *démontré* que *nous n'apercevons* pas de contradiction, etc. Cela ne se *démontre* pas, cela se *constate* : on en a aperçu ou l'on n'en a pas aperçu.

Ce point écarté, la question principale, celle de savoir si l'ensemble peut être ordonné, n'a évidemment pas pour Baire (pas plus que pour Lebesgue et toi) le même sens que pour moi. Je dirais plutôt : l'ordination est-elle possible? (et non pas même peut-*on* ordonner, de crainte d'avoir à penser ce qu'est cet *on*); Baire dirait : pouvons-*nous* ordonner ? Question toute subjective, à mon avis.

Ce sont donc deux conceptions des mathématiques, deux mentalités qui sont en présence. Je ne vois, dans tout ce qui a été dit jusqu'ici, aucun motif de changer la mienne. Je ne prétends pas l'imposer. Tout au plus ferai-je valoir en sa faveur les arguments que j'ai indiqués dans la *Revue générale des sciences* (30 mars 1905), savoir :

1. Je crois que le débat est au fond le même qui s'est élevé entre Riemann et ses prédécesseurs, sur la notion même de fonction. La *loi* qu'exige Lebesgue me paraît ressembler fort à l'expression[5] analytique que réclamaient à toute force les adversaires de Riemann. Et même à une expression analytique pas trop bizarre. Non seulement la *numérabilité* des choix ne me paraît pas changer la question, mais il en est de même de l'*unicité*. Je ne vois pas comment nous aurions le droit de dire : « Pour chaque valeur de x il existe un nombre satisfaisant à... Soit y ce nombre... », alors que, parce que « la mariée est trop belle », nous ne pouvons pas dire : « Pour chaque valeur de x il existe une infinité de nombres satisfaisant à... Soit y l'un de ces nombres... »

2. Les choix arbitraires de Tannery conduisent à des nombres y que *nous serions* incapables de définir. Je ne conçois pas que ces nombres n'existent pas.

5. Je crois devoir insister un peu sur ce point de vue qui, s'il faut dire toute ma pensée, me paraît former le fond même du débat. Il me semble que le progrès véritablement essentiel des Mathématiques, à partir de l'invention même du Calcul infinitésimal, a consisté dans l'annexion de notions successives qui, les unes pour les Grecs, les autres pour les géomètres de la Renaissance ou les prédécesseurs de Riemann, étaient « en dehors des mathématiques », parce qu'il était impossible de les décrire.

Quant aux raisonnements présentés par M. Bernstein (*Math. Annalen*, t. LX, p. 187), et, par conséquent, ses objections à la démonstration de M. Zermelo, je ne les considérerai pas, pour ma part, comme probants. Cette opinion est d'ailleurs indépendante de la question que nous discutons actuellement.

M. Bernstein part du paradoxe de M. Burali-Forti (*Circolo matematico di Palermo*, 1897) relatif à l'ensemble W de *tous* les nombres ordinaux. Pour échapper à la contradiction mise en évidence par M. Burali-Forti, il suppose le nombre ordinal W tel qu'il est soit impossible de lui ajouter 1. Cette opinion est, pour moi, inadmissible, ainsi que les arguments imaginés en sa faveur par M. Bernstein. L'ordre établi (d'après la théorie de M. Cantor) entre les éléments de W et l'élément supplémentaire (c'est à cet ordre que s'attaque l'auteur) est une pure *convention*, qu'on est toujours libre de faire et à laquelle les propriétés de W, quelles qu'elles soient, ne sauraient mettre aucun obstacle.

La solution est autre. C'est l'existence même de l'ensemble W qui implique contradiction. Dans sa définition, la définition générale du mot *ensemble* est incorrectement appliquée. On n'a le droit de former un ensemble qu'avec des objets préalablement existants et il est aisé de voir que la définition de W suppose le contraire.

Même observation pour *l'ensemble de tous les ensembles* (Hilbert, Congrès de Heidelberg).

Revenons à la question primitive. Voici encore, à cet égard, non un argument, car je crois que nous coucherons éternellement sur nos positions, mais une conséquence de tes principes.

Cantor a considéré l'ensemble de toutes les fonctions qui, dans l'intervalle [0, 1], ne prennent que les valeurs 0, 1. Cet ensemble a, pour moi, un sens clair et sa puissance est $2^{\aleph}$, comme l'énonce Cantor*. De même, l'ensemble de toutes les fonctions de x a pour moi un sens, et je vois clairement que sa puissance est $\aleph^{\aleph}$.

Quel sens tout cela a-t-il pour toi ? Il me paraît évident que cela ne peut en avoir aucun. Car à toute fonction tu imposes une condition supplémentaire qui n'a aucun sens mathématique : celle d'être *descriptible* pour *nous*.

Ou plutôt, voici ce que cela signifie : on ne doit considérer, à ton point de vue, que les fonctions définissables en un nombre

* $\aleph$ désigne ici la puissance du continu (C.R.)

fini de mots. Mais, à ce compte, les deux ensembles ainsi formés sont *dénombrables,* ainsi que tous les ensembles possibles, d'ailleurs.

J. HADAMARD.

V. *Lettre de M. Borel à M. Hadamard*

[...] Je voudrais d'abord te signaler une intéressante remarque faite par M. Lebesgue à la séance de la Société du 4 mai : Comment M. Zermelo peut-il être assuré qu'aux divers points de son raisonnement il parle *du même* choix de l'élément distingué, puisqu'il ne le caractérise par rien *pour lui-même* (il ne s'agit même pas ici d'un contradicteur possible; il s'agit d'être cohérent avec soi-même).

Quant à ta nouvelle objection, voici quelle est ma situation à son égard.

Je n'aime guère écrire des alephs, mais je consens cependant à faire des raisonnements équivalents à ceux dont tu parles, sans me faire guère d'illusion sur leur valeur intrinsèque, *mais en les regardant comme pouvant guider pour d'autres raisonnements plus sérieux.* Comme exemple pratique, je puis te citer la note III que j'ai insérée à la fin de mon dernier petit livre (*Leçons sur les fonctions de variables réelles*, etc., rédigées par Maurice Fréchet) ; le raisonnement qui y est employé est manifestement suggéré par le raisonnement de Cantor, que j'ai rapporté dans mes premières *Leçons sur la théorie des fonctions*[6], page 107.

La forme que j'adopte dans cette note III n'est pas encore absolument satisfaisante, comme je l'indique au bas de la dernière page de mon livre; mais le raisonnement analogue de M. Lebesgue dans son Mémoire paru dans le *Journal de Jordan* (1905) est, je crois, tout à fait irréprochable, en ce sens qu'il conduit à un résultat précis, exprimable au moyen d'un nombre fini de mots ; il a cependant son origine dans celui de Cantor.

On peut se demander quelle est la valeur réelle de ces raisonnements que je ne regarde pas comme valables absolument et

6. Dans les notes I et II de ce petit livre, je fais constamment des raisonnements du type de ceux que tu me refuses le droit de faire; je suis d'ailleurs à chaque instant rempli de scrupules et chacune de ces deux notes se termine par une phrase très restrictive.

qui cependant conduisent ultérieurement à des résultats effectifs. Il semble en effet que, s'ils étaient dépourvus de toute valeur, ils ne pourraient conduire à rien, car ce seraient des assemblages de mots vides de sens. Je crois qu'on serait ainsi trop sévère et qu'ils ont une valeur analogue à celle de certaines théories de physique mathématique, par lesquelles nous ne prétendons pas exprimer la réalité, mais avoir un guide qui nous permette, par analogie, de découvrir des phénomènes nouveaux, qu'il reste ensuite à vérifier. Il y aurait un travail considérable à faire pour savoir quel est le sens réel et précis que l'on peut attribuer à des raisonnements de ce genre; ce travail est inutile ou du moins hors de proportion avec son utilité; les rapports avec le concret de ces raisonnements trop abstraits apparaissent d'eux-mêmes lorsque le besoin s'en fait sentir.

Je serai d'accord avec toi sur le fait qu'il est contradictoire de parler de l'ensemble de tous les ensembles, car, par le raisonnement de la page 107 citée plus haut, on peut former un ensemble de puissance plus grande, mais je crois que cette contradiction tient à ce que l'on introduit des ensembles non définis réellement.

E. BOREL.